目　　录

第一章　随机事件与概率

一、基本要求

①了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算．

②了解概率的定义（包括古典概率、几何概率、概率的频率定义和概率的公理化定义），掌握概率的性质并会应用它们进行概率计算．

③理解条件概率的概念，掌握概率的乘法公式、全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式并会应用它们进行概率计算．

④理解事件独立性的概念并会应用它进行概率计算．

⑤掌握伯努利（Bernoulli）概型并会应用它进行概率计算．

二、内容提要

1. 随机事件

(1)随机试验．

是指满足下述三个条件的试验．

①可以在相同的条件下重复进行．

②试验的全部可能结果不止一个，并且在试验之前能明确知道它们或知道它们包含在某个范围内．

③每次试验必发生全部可能结果中的一个且仅发生一个，但某一次试验究竟发生哪一个可能结果，在试验之前不能预言．

随机试验简称试验，用 E 表示．

(2)样本空间．

试验 E 的全部可能结果构成的集称为 E 的样本空间，用 S 表示．

试验 E 的一个可能结果称为 E 的一个基本事件，用 ω 表示．基本事件 ω 是样本空间 S 的元素，基本事件也称为样本点．

(3)随机事件．

试验 E 全部可能结果中某一确定的部分称为随机事件，简称为事件．事件可以用大写字母 A、B、C 等表示．事件是由基本事件组成的，事件是样本空间的子集．但是，在概率论中，并不总是把样本空间的一切子集都当成事件，而是样本空间中具有某种性质的子集才是事件*．

事件的发生：在一次试验中，当且仅当 A 中的一个基本事件发生时，则称 A 发生．A 发生也称 A 出现．

在一次试验之前，不能预言哪一个基本事件一定发生，因此，也就不能预言事件 A 一定发

* 关于事件概念的确切含义，可见参考书目[1]P2、P12 的注．

生．这就是说，在一次试验中，事件 A 可能发生也可能不发生．

必然事件：在每次试验都必发生的事件，称为必然事件，用 S 表示．

不可能事件：在每次试验都必不发生的事件，称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示．

必然事件与不可能事件虽不具有"在一次试验中，可能发生也可能不发生"的特点，但是，它们仍是事件．

(4)事件的关系与运算．

①事件的关系与运算的概念．

设试验 E 的样本空间为 S，A、B、$A_i(i=1,2,\cdots)$为 E 中的事件．

含于或包含：若 A 发生必然导致 B 发生，则称 A 含于 B，记作 $A\subset B$；或称 B 包含 A，记作 $B\supset A$．

相等：若 $A\subset B$ 又 $B\subset A$，则称 A 等于 B，或称 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

积或交：A 与 B 都发生称为 A 与 B 的积或交，记作 AB 或 $A\cap B$．A 与 B 都发生也叙述为 A 与 B 同时发生或 A 发生且 B 发生．

和或并：A 与 B 至少有一个发生称为 A 与 B 的和或并，记作 $A\cup B$．A 与 B 至少有一个发生也叙述为 A 发生或 B 发生．

差：A 发生而 B 不发生称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$．

互斥或互不相容：若 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥，或称 A 与 B 互不相容．否则，称 A 与 B 相容．

对立或互逆：若 A、B 满足 $A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$，即在每次试验中 A、B 必发生其一但不能同时发生，则称 B 为 A(或 A 为 B)的对立事件，记作 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$)，或称 A 与 B 互为对立事件，或称 A 与 B 为互逆事件．

不发生：A 不发生记作 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}=S-A$，$A=\overline{\overline{A}}$，$A$ 与 $\overline{A}$ 互为对立事件．

两个事件的积、和、互斥等概念可以推广到任意有限个事件或可列无穷多个事件的情形中去．

例如，A_1、A_2、$\cdots$、A_n 都发生，称为 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_n$ 至少发生一个，称为 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_n$ 中任意两个事件都是互斥的，称这 n 个事件是互斥的或称这 n 个事件是两两互斥的．

类似地，可以给出可列无穷多个事件的积、和、互斥等概念，这里就不叙述了．

②一些常用的事件之间的关系式．

1° 对任意的事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset S$．

2° $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$．

3° $AB=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}$．

4° 对任意的两个事件 A、B，有

$$A=AB\cup A\overline{B},\quad B=AB\cup\overline{A}B,$$

$$A\cup B=A\cup\overline{A}B=B\cup A\overline{B}=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB,$$

$$A-B=A\overline{B}=A-AB=(A\cup B)-B.$$

5° 对任意的三个事件 A、B、C，有

$$A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C,$$

$A(B-C)=AB-AC=AB\overline{C}=AB-C=AB-ABC.$

注：上述各式右端运算符$\cup$两边的事件有些是互斥的，运算符 $-$ 的前后的两个事件有些是有包含关系的．

③事件运算所满足的性质．

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA.$

2° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(AB)C=A(BC).$

3° 分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC,$

$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C).$

4° 吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, AB=A$；反之亦然，即若 $A\cup B=B$ 或 $AB=A$，则 $A\subset B$.

特别地，有 $A\cup A=A, A\cup S=S, A\cup\varnothing=A, AA=A, AS=A, A\varnothing=\varnothing.$

5° 对偶律（德·摩根律）

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

分配律和对偶律还可以推广到任意有限个事件或可列无穷多个事件的情形中去．例如有

$(\bigcup_i A_i)B=\bigcup_i(A_iB), (\bigcap_i A_i)\cup B=\bigcap_i(A_i\cup B).$

$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$、$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$．*

④事件的图示表示法．

它给出了事件的关系与运算的一种直观解释，读者可以采用这种方法来帮助理解某些事件之间的关系与运算．例如，前面给出的一些常用的事件之间的关系式、事件运算所满足的性质等．

2. 概率及其性质

概率是事件发生可能性的一种度量，它是概率论中最基本的概念之一．下面介绍它的几种定义．

(1)古典概率．

设试验 E 满足：

①样本空间 S 只含有 n 个基本事件，记作 ω_1、ω_2、$\cdots$、ω_n，即

$$S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

②基本事件 ω_1、ω_2、$\cdots$、ω_n 发生是等可能的．则称 E 为古典概型．

对于古典概型 E，若事件 A 是由 k 个基本事件组成的，则 A 的概率规定为$\frac{k}{n}$，即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

用公式(1.1)计算的概率称为古典概率．

(2)几何概率．

在概率论发展的早期，人们还研究了另一种试验，它的全部可能结果是无穷多个且具有

* $\bigcup_i A_i$ 表示 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，类似地，$\bigcap_i A_i$ 表示 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

"等可能性". 在这种试验中,事件概率的计算一般可以利用几何的方法来解决. 因此,人们把这种试验称为几何概型.

我们以平面的情形来说明几何概型. 在这种概型中,试验的全部可能结果构成平面上某一可求积的区域 S,其面积大于零. S 是试验的样本空间,S 中一切可求积的子集是事件. 事件 A 发生,即试验的结果为 A 中的点,或称试验结果落入 A. S 中的基本事件发生具有"等可能性"的含义是:事件 A 发生的概率与 A 的面积成正比,而与 A 的形状及它在 S 中的位置无关. 于是,在这种几何概型中,事件 A 的概率规定为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}. \tag{1.2}$$

用公式(1.2)计算的概率称为几何概率.

对于一维、三维或多维的几何概型问题,可仿平面的情形进行讨论.

(3)概率的频率定义.

①事件的频率及其稳定性.

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的一个事件. 把试验 E 重复进行 n 次,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 m 称为事件 A 的频数. 事件 A 的频数 m 与试验的次数 n 之比,称为在这 n 次试验中事件 A 的频率,记作 $P^*(A)$,即

$$P^*(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.3}$$

显然,事件 A 的频率 $P^*(A)$ 与试验次数 n 有关;而且对于一个具体的数值 n,某一回 n 次试验与另一回 n 次试验所得到的事件 A 的频率 $P^*(A)$ 也未必相同. 然而,实践表明:当试验次数 n 很大时,事件 A 的频率 $P^*(A)$ 几乎稳定地接近一个常数 P. 频率这种性质称为频率的稳定性,它是事件本身所固有的.

②概率的频率定义.

频率的稳定性使人们产生了这样的认识:

可以用事件的频率来描述事件的概率. 于是,就有了概率的频率定义.

定义 1.1 在一组不变的条件下,重复作 n 次试验,记 m 是 n 次试验中事件 A 发生的次数. 当试验次数 n 很大时,如果频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某数值 p 附近摆动,而且一般地说,随着试验次数的增加,这种摆动的幅度越来越小,则称数值 p 为事件 A 在这一组不变的条件下发生的概率,记作 $P(A)=p$.

概率的频率定义也称为概率的统计定义.

(4)概率的公理化定义.

①概率的公理化定义.

下面扼要地介绍一下概率的公理化定义. 在这个定义中,概率是用列举其所具有的基本性质的方法来定义的,而事件可以简单地理解为样本空间 S 中具有某种性质的子集.

定义 1.2 设试验 E 的样本空间为 S,如果对于每一个事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应,且满足下面三条公理:

公理 1(非负性) 对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性) 对必然事件 S,有 $P(S)=1$;

公理 3(完全可加性) 若可列无穷多个事件 A_1、A_2、…、A_i、…互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i). \tag{1.4}$$

那么称 $P(A)$为事件 A 的概率.

②概率的性质.

从概率的三条公理出发,可以推导出概率的其他性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$;

性质 2 (有限可加性) 若 A_1、A_2、…、A_n 互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.5}$$

性质 3 对任意事件 A,有

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{1.6}$$

性质 4 若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.7}$$

$$P(A)\leqslant P(B). \tag{1.8}$$

特别地,对任意事件 A,有

$$P(A)\leqslant 1. \tag{1.9}$$

性质 5(加法公式或加法定律) 对任意两个事件 A、B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.10}$$

性质 6(一般加法公式或一般加法定律) 对任意 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\leqslant i_1<i_2\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2})+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot$$

$$\sum_{i\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i). \tag{1.11}$$

特别地,当 $n=3$ 时,式(1.11)将变为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \tag{1.11'}$$

3. 条件概率及有关的公式

(1)条件概率.

①条件概率的定义.

定义 1.3 设 A、B 是任意两个事件且 $P(B)>0$,在事件 B 已发生的条件下,事件 A 发生的条件概率 $P(A|B)$定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.12}$$

②条件概率的性质.

利用条件概率的定义、概率的三条公理和性质,不难证明条件概率的如下一些性质.

设 $P(C)>0$,则

1°对任意的事件 A,有 $0\leqslant P(A|C)\leqslant 1$;

2°$P(S|C)=1$, $P(\varnothing|C)=0$;

3°对可列无穷多个互不相容的事件 A_1、A_2、…、A_i、…,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|C)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|C). \tag{1.13}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i|C)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i|C). \tag{1.14}$$

4° 对任意的事件 A，有

$$P(A|C)=1-P(\overline{A}|C). \tag{1.15}$$

5° 若 $A\subset B$，有

$$P(B-A|C)=P(B|C)-P(A|C). \tag{1.16}$$

$$P(A|C)\leqslant P(B|C). \tag{1.17}$$

6° 对任意两个事件 A、B，有

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C). \tag{1.18}$$

对任意 n 个事件 A_1、A_2、…、A_n，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i|C)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i|C)-\sum_{i\leqslant i_1<i_2\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}|C)+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\cdot\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}|C)+\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i|C). \tag{1.19}$$

综上所述，可见条件概率与概率具有相同的性质．

(2)乘法公式．

对任意两个事件 A、B.

当 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$. (1.20)

当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$. (1.20′)

对任意 n 个事件 A_1、$A_2\cdots A_n(n\geqslant 2)$，当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.21}$$

式(1.20)、(1.20′)称为两个事件的乘法公式，式(1.21)称为 n 个事件的乘法公式或一般乘法公式．乘法公式也称为乘法定律．

(3)全概率公式．

若事件组 B_1、B_2、…、B_n 满足

①B_1、B_2、…、B_n 互不相容且 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

②$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则对任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.22}$$

式(1.22)称为全概率公式．

满足条件①和②的事件组 B_1、B_2、…、B_n 也称为完备事件组．

注：a.完备事件组的条件②可改为 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i\supset A$，式(1.22)也成立；

b.完备事件组中事件的个数为可列无穷多时，全概率公式也成立．此时式(1.22)将变成为：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.22′}$$

c.应用全概率公式解决问题的关键往往在于,找出适合解决该问题的一个完备事件组.把 B_1、B_2、…、B_n 看成事件 A 发生的各种"可能的原因"或"可能的前提条件",这样一种看法将有助于找出这个完备事件组.

(4)贝叶斯(Bayes)公式.

若 B_1、B_2、…、B_n 是一完备事件组,则对任意事件 $A(P(A)>0)$,有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{1.23}$$

式(1.23)称为贝叶斯公式.

4. 事件的独立性

(1)事件独立性的概念.

定义 1.4 对任意两个事件 A、B,若

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.24}$$

则称 A、B 相互独立或称 A、B 独立.

定义 1.5 对任意三个事件 A、B、C,若

$$\left.\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B)\\P(AC)&=P(A)P(C)\\P(BC)&=P(B)P(C)\\P(ABC)&=P(A)P(B)P(C)\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

则称 A、B、C 相互独立,或称 A、B、C 独立.

一般地,对任意 n 个事件 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant 2)$,若

$$\left.\begin{aligned}&P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) && 1\leqslant i<j\leqslant n\\&P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) && 1\leqslant i<j<k\leqslant n\\&\qquad\vdots\\&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

则称 A_1、A_2、…、A_n 相互独立,或称 A_1、A_2、…、A_n 独立.

事件的独立性是概率论中一个重要的概念,对它有如下的几点说明.

①必然事件 S 和不可能事件 $\emptyset$ 与任何事件相互独立.

②若事件 A、B、C 满足式(1.25)中前三个式子时,则称 A、B、C 是两两独立的.显然,若 A、B、C 相互独立,则 A、B、C 两两独立.反之不然.

③在实际问题中,有时不是用定义而是根据事件之间的实际意义来判断 n 个事件是否独立.这时要注意判断是否正确.

(2)事件独立性的性质.

性质 1 若 $P(B)>0$,则 A、B 独立的充分必要条件是:$P(A|B)=P(A)$;

若 $P(A)>0$,则 A、B 独立的充分必要条件是:$P(B|A)=P(B)$.

性质 2 若 A、B 独立,则 A、$\overline{B}$ 独立,$\overline{A}$、B 独立,$\overline{A}$、$\overline{B}$ 独立.

性质 2 可推广到 $n(n\geqslant 2)$个事件独立的情形中去,其叙述如下:

若 A_1、A_2、…、A_n 独立,则 B_1、B_2、…、B_n 也独立,其中 B_i 为 A_i 或 $\overline{A_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

特别地，若 A_1、A_2、…、A_n 独立，则$\overline{A_1}$、$\overline{A_2}$、…、$\overline{A_n}$也独立．

性质 3 若 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant 2)$独立，则其中任意 $m(1<m<n)$个事件也独立．

性质 4 若 A_1、A_2、…、$A_n(n\geqslant 2)$独立，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]. \tag{1.27}$$

5. 伯努利(Bernoulli)概型

若试验 E 只有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q(0<p<1)$，则称 E 为伯努利试验或伯努利概型．

设 E 是伯努利试验，"把 E 在相同的条件下，独立地重复进行 n 次"* 作为一个试验，则称这个试验为 n 重伯努利试验或 n 重伯努利概型，记为 E^n．在 n 重伯努利概型中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(\text{“}A\text{ 恰好发生 }k\text{ 次”})=b(k;n,p)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,\cdots,n \tag{1.28}$$

三、问题与思考

1. 事件的和或者差的运算的等式两端一般是不能"移项"的．例如由

$$A\cup B=C \quad \nRightarrow \quad A=C-B,$$

由

$$A-B=D \quad \nRightarrow \quad A=D\cup B.$$

但是，增加一些条件便可以"移项"了．有下述结果：

(1)若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=C$，则 $A=C-B$；

(2)若 $A\supset B$，且 $A-B=D$，则 $A=D\cup B$.

利用事件的图示表示法，容易验证上述两个结果是正确的．

2. 计算古典概率时，有些初学者常常会问：如果需要用排列或者组合计数时，在什么情况下用排列，在什么情况下用组合呢？

答 对于这个问题，要在搞清楚题意的基础上，根据解题的简洁与方便或者解题者的习惯，选择适合解决该问题的试验 E 及样本空间 S，由此决定采用排列或者组合来计数．

让我们通过下面的例子来说明上面的论述．

例 10 个产品中有 6 个正品 4 个次品，现从中任取 2 个，求下列事件的概率：

(1)A：这 2 个产品都是次品；

(2)B：这 2 个产品 1 个是次品 1 个是正品；

(3)C：第一次取到的是次品，第二次取到的是正品．

对于这个例子，有两点说明：

a.在没有特别指明的情形下，一般认为产品都是有不同编号的．例如，在此例中，可以认为编号为 1～6 的产品为正品，编号为 7～10 的产品为次品．

b.在概率论中，"任取 2 个"与"随机地不放回地取 2 个"含义相同．而且对于"任取 2 个"有两种理解：

---

* 关于此句话的含义，请看参考书目[1]P21 的解释．

第一种是,每次随机地取1个记录其编号后不放回,再取下一个.这样取了2次共取了2个产品.在这种理解下,任取2个产品是有先后顺序的.

第二种是,随机地不放回地一下子取了2个产品.在这种理解下,任取2个产品是没有先后顺序的.

上述两种理解都是对的.

解 (1)**法1** 按照第一种理解,任取2个产品是有顺序的,基本事件总数 $n_1=A_{10}^2=90$,A 的有利场合数* $k_1=A_4^2=12$,于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1}{n_1}=\frac{2}{15}.$$

法2 按照第二种理解,任取2个产品是不计顺序的,基本事件总数 $n_1'=C_{10}^2=45$,A 的有利场合数 $k_1'=C_4^2=6$,于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1'}{n_1'}=\frac{2}{15}.$$

(2)**法1** 按照第一种理解,任取2个产品是有顺序的,基本事件总数 $n_2=A_{10}^2=90$,B 的有利场合数 $k_2=A_6^1A_4^1+A_4^1A_6^1=48$,于是所求概率为

$$p_2=P(B)=\frac{k_2}{n_2}=\frac{8}{15}.$$

法2 按照第二种理解,任取2个产品是不计顺序的,基本事件总数 $n_2'=C_{10}^2=45$,B 的有利场合数 $k'_2=C_6^1C_4^1=24$,于是所求概率为

$$p_2=P(B)=\frac{k_2'}{n_2'}=\frac{8}{15}.$$

(3)由题意知,这时需要考虑顺序.基本事件总数 $n_3=A_{10}^2=90$,C 的有利场合数 $k_3=A_4^1A_6^1=24$,于是所求概率为

$$p_3=P(C)=\frac{k_3}{n_3}=\frac{4}{15}.$$

由上述解法可见,对于(1)、(2)用排列或者组合都可以,对于(3)就需要用排列了.

3. 计算古典概率,要正确求出基本事件总数和事件的有利场合数.考虑欠全面时,容易发生重复计算或者漏算的情况.

让我们通过下面的例子来分析重复计算和漏算是怎样发生的.

例 一年有12个月,假定每人出生在任何一个月份是等可能的.任选四个人,求下列事件的概率:

(1)A:四个人出生的月份全不相同;

(2)B:四个人中至少有两个人出生月份相同.

解 基本事件总数 $n=12^4=20736$.

(1)A 的有利场合数 $k_1=A_{12}^4=11880$,于是所求概率为

$$p_1=P(A)=\frac{k_1}{n}=\frac{55}{96}.$$

---

* 习惯上,称A中的基本事件数为A的有利场合数.

(2)由于 $B=\overline{A}$，于是所求的概率为

$$p_2=P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{A_{12}^4}{12^4}=\frac{8856}{20736}=\frac{41}{96}.$$

对于 B 的有利场合数似乎还有下述两种求法：

①四个人中至少有两个人出生月份相同可如下实现：四个人中先任取两人，他们的出生的月份相同，可以是一年中任意一个月；另外两个人的出生月份分别是一年中任意的月份．由此可得 B 的有利场合数为 $k_2'=C_4^2\times 12\times 12^2$，于是所求的概率为

$$p_2=\frac{k_2'}{n}=\frac{1}{2}.$$

②四个人中至少有两个人出生月份相同可如下实现：四个人中恰有两人出生月份相同、恰有三人出生月份相同、恰有四人出生月份相同，这三种情况互不相容．由此可得 B 的有利场合为 $k_2''=C_4^2\times 12\times 11\times 10+C_4^3\times 12\times 11+C_4^4\times 12=12\times 705$，于是所求的概率为

$$p_2''=\frac{k_2''}{n}=\frac{235}{576}.$$

显然，(2)的上述两种解法都是有错误的．在①中，B 的有利场合数有重复计算；在②中，B 的有利场合数有漏算．下面让我们具体分析一下．

在①中，B 的有利场合数在下述三种情况中都有重复计算的情形发生：

a.四个人中有两人出生月份相同，另两人出生月份也相同(但与前两人出生月份不同)．在这种情况下，把四人分成二人、二人的两个小组共有 $\frac{1}{2}\times C_4^2=3$ 种可能的分法，而不是 $C_4^2=6$ 种可能的分法．实际上，不妨设四人为张、王、李、赵．分成二人、二人的两个小组的三种分法为[张、王]，[李、赵]；[张、李]，[王、赵]；[李、王]，[张、赵]；再没有其他的分法了．因此，在这种情况下，有利场合数为 $\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$，而不是在 k_2' 中所计算的 $C_4^2\times 12\times 11$．也就是说，对于这种情况，在 k_2' 中多算了 $\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$ 个有利场合数．

b.四个人中有三人出生月份相同，另一人出生月份与前三人不同．在这种情况下，把四人分成三人、一人的两个小组共有 C_4^3 种可能的分法，而不是在 k_2' 中所计算的 $C_3^2\times C_4^3$ 种可能的分法．原因如下，比如张、王、李三人出生月份相同，赵出生月份与他们不同．这一种情况我们记为[张、王、李]，赵；而在 k_2' 中，由于是先任取两人，就将这一种情况误认为如下的三种情况了：[张、王]、[李]，赵；[张、李]、[王]，赵；[王、李]、[张]，赵．因此，在这种情况下，有利场合数为 $C_4^3\times 12\times 11$，而不是在 k_2' 中所计算的 $C_3^2\times C_4^3\times 12\times 11$．也就是说，对于这种情况，在 k_2' 中多算了 $2\times C_4^3\times 12\times 11$ 个有利场合数．

c.四个人出生月份都相同．在这种情况下，仿照前面两种情况的分析可知，有利场合数为 $C_4^4\times 12$，而不是在 k_2' 中所计算的 $C_4^2\times C_4^4\times 12$．也就是说，对于这种情况，在 k_2' 中多算了 $5\times C_4^4\times 12$ 个有利场合数．

综上所述，B 的有利场合数应为 k_2' 减去上面三种情况中多算的有利场合数，即

$$C_4^2\times 12^3-\frac{1}{2}\times C_4^2\times 12\times 11-2\times C_4^3\times 12\times 11-5\times C_4^4\times 12$$
$$=10368-396-1056-60=8856.$$

在②中，遗漏了四个人中有两人出生月份相同，另两人出生月份也相同(但与前两人出生

月份不同这种情况．于是 B 的有利场合数应为 k''_2 加上这种情况的有利场合数 $\frac{1}{2}C_4^2\times 12\times 11$，即

$$C_4^2\times 12\times 11\times 10+C_4^3\times 12\times 11+C_4^4\times 12+\frac{1}{2}\times C_4^2\times 12\times 11$$

$$=7920+528+12+396=8856.$$

上述计算虽然繁琐，但是它提供了全面考虑问题，避免重复计算和漏算的一种具体作法，这有助于提高我们分析问题的能力．

4. 一些初学者有这样的想法：既然在概率的公理化定义中规定了概率具有完全可加性（公理3），那么概率的有限可加性（性质2）就自然而然地成立了，何必证明呢？这种想法对吗？

答 这种想法不对．有这种想法的初学者的推理过程，是利用了认为显然成立的一个命题："一个结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形也成立．"实际上，这个命题是不对的．让我们举一个例子来说明这个命题不对．自然数{1,2,3,…}是可列无穷多个数组成的集，它存在一个真子集（比如正偶数{2,4,6,…}）与自然数本身一一对应．实际上，我们还可以得到更一般的结论："可列无穷多个数组成的集，至少存在它的一个真子集与其一一对应．"而有限多个数组成的集，它的任何一个真子集都不能与其一一对应．所以，有限多个数组成的集不具有可列无穷多个数组成的集的上述性质．这个例子说明：有些结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形未必成立．因此，虽然根据概率的公理化定义知道概率具有完全可加性，但是概率具有有限可加性这条性质还是需要证明的．

5. 有些初学者容易混淆条件概率 $P(A|B)$（或者 $P(B|A)$）与 $P(AB)$ 的区别，认为 $P(A|B)=P(AB)$．

答 这种认为是不对的．我们通过古典概率和几何概率的两个例子来说明 $P(A|B)$、$P(B|A)$ 与 $P(AB)$ 的区别．

例1 一个班级有35名同学，他们组成的情况如下表：

籍贯 \ 性别	北京籍	非北京籍	总计
男	8	15	23
女	2	10	12
总计	10	25	35

从这个班中随机地任选一名同学，设

A：男同学，B：北京籍

由古典概率知：

随机地任选一名同学既是男同学又是北京籍的概率为 $P(AB)=\frac{8}{35}$.

随机地任选一名同学，在已知他是北京籍的条件下他又是男同学的概率为 $P(A|B)=\frac{8}{10}$.

随机地任选一名同学，在已知他是男同学的条件下他又是北京籍的概率为 $P(B|A)=\frac{8}{23}$.

例2 设 S 为平面上的一个矩形区域，A、B 为 S 中两个相交的圆（如图1－1）．

在以 S 为样本空间的几何概型中，圆 A、圆 B 及这两个圆相交的部分是 S 中的三个事件，分别用 A、B 及 AB 表示．由几何概率和条件概率的定义知：

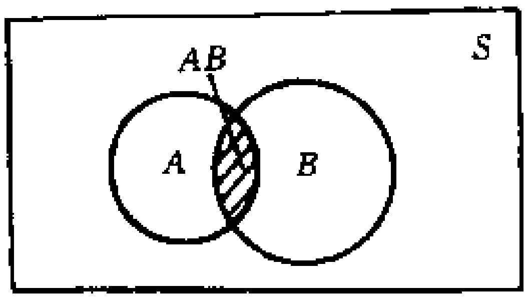


图 1－1

$$P(B)=\frac{B\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}},$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{AB\text{ 的面积}}{B\text{ 的面积}},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{AB\text{ 的面积}}{A\text{ 的面积}}.$$

这表明：

$P(AB)$是 AB 的面积与 S 的面积的比，$P(A|B)$是 AB 的面积与 B 的面积的比，$P(B|A)$是 AB 的面积与 A 的面积的比．

6. 为了搞清楚两个事件相互独立与互不相容之间的关系，我们先证明一个命题：

命题 1 设 A、B 为两个事件，若

$$0<P(A)<1,0<P(B)<1, \tag{1.29}$$

则 A、B 相互独立，A、B 互不相容，$A\subset B$ 或 $B\subset A$，这三种情形中的任何两种不能同时成立．

证 在条件(1.29)下，

当 A、B 相互独立时，有 $P(AB)=P(A)P(B)$. (1.30)

当 A、B 互不相容时，有 $P(AB)<P(A)P(B)$. (1.31)

当 $A\subset B$(或 $B\subset A$)时，有 $P(AB)>P(A)P(B)$. (1.32)

在条件(1.29)下，式(1.30)、(1.31)、(1.32)中的任何两个不能同时成立．因此，在条件(1.29)下，A、B 相互独立，A、B 互不相容，$A\subset B$ 或 $B\subset A$，这三种情形中的任何两种不能同时成立．

命题 1 表明：在条件(1.29)下，若两个事件相互独立时，必不互不相容，也不一个包含另一个，而只能是相容了．

在命题 1 中，如果去掉条件(1.29)情况将如何呢？请看命题 2：

命题 2 若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任何事件 B 相互独立．

证 若 $P(A)=0$，又 $AB\subset A$，故 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$.

于是 $P(AB)=0=P(A)=P(A)P(B)$，

所以 A 与任何事件 B 相互独立．

若 $P(A)=1$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)=0$.

由前面所证知，$\overline{A}$ 与任何事件 B 相互独立．再由事件独立性的性质 2 知，$\overline{\overline{A}}$ 与 B 相互独立，即 A 与 B 相互独立．

另种方法证明：由 $P(A)=1$ 知 $P(\overline{A})=0$，进而有 $P(\overline{A}B)=0$.

又 $B=AB\cup\overline{A}B$ 且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，故

$$P(A)P(B)=P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(AB).$$

即 A 与 B 相互独立．

命题 2 表明：如果 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，那么 A 与某一个事件 B 既可以相互独立，又可

以互不相容(此时,取 $B=\overline{A}$ 即可);A 与某一个事件 C 既可以相互独立,又可以一个包含另一个(此时,取 $C=A$ 即可).

四、典型例题

1. 设 A、B 为任意两个事件,化简下式

$$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$$

分析 考虑到所需化简之式的特点,利用事件积对和的分配律:$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$即可.

解 利用事件积对和的分配律所给之式化为

$$(A\overline{A}\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})=(\varnothing\cup B)(\varnothing\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing.$$

2. 设 A、B 为两事件,

(1)若 $AB=A\cup B$,则 A 与 B 应满足什么关系;

(2)若 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$,则 A 与 B 应满足什么关系.

分析 要充分利用事件的关系与运算的一些性质和常用的关系式.

解 (1)由 $AB=A\cup B=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$ 知,$\overline{A}B\subset AB$

又 $\overline{A}B$、$A\overline{B}$、AB 互不相容,从而有,$\overline{A}B=(\overline{A}B)(\overline{A}B)\subset(\overline{A}B)(AB)=\varnothing$

故 $\overline{A}B=\varnothing$,从而有 $B\subset A$;

仿上述推导可得 $A\overline{B}=\varnothing$,从而有 $A\subset B$;

于是得 $A=B$.

(2)由 $AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,有

$$\varnothing=(A\cup B)(\overline{A\cup B})=(A\cup B)AB=AB,$$

$$S=(A\cup B)\cup(\overline{A\cup B})=(A\cup B)\cup AB=A\cup B.$$

上述两式表明 A 与 B 是互为对立事件,即,$A=\overline{B}$.

3. 一射手向目标射击 3 发子弹,A_i 表示第 i 发子弹打中目标($i=1,2,3$).试用 A_1、A_2、A_3 及其运算表示下列事件:

(1)B_1:3 发子弹都打中了目标;

(2)B_2:3 发子弹至少有 1 发打中了目标;

(3)B_3:3 发子弹至少有 1 发未打中目标;

(4)B_4:3 发子弹至少有 2 发打中了目标;

(5)B_5:3 发子弹恰有 1 发打中了目标;

(6)B_6:3 发子弹至多有 1 发打中了目标.

解 (1)$B_1=A_1A_2A_3$;(2)$B_2=A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3)$B_3=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$;又 $\overline{B}_3=B_1$,故 $B_3=\overline{A_1A_2A_3}$;

(4)$B_4=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$;

(5)$B_5=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;或 $B_5=B_2-B_4=(A_1\cup A_2\cup A_3)-(A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3)$;

(6)$B_6=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;由 $\overline{B}_6=B_4$ 知,$B_6=\overline{A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3}$;

或 B_6:至少有 2 发未中,故 $B_6=\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$.

4. 袋中有 n 只黑球和 n 只白球,从袋中随机地不放回地将球一只只全部摸出来．试求下列事件的概率:

(1)A_1:黑、白球恰好相间被摸出;

(2)A_2:任意两只黑球都不相继被摸出;

(3)A_3:n 只黑球连续被摸出;

(4)A_4:第 k 次摸球时第 1 次摸到黑球($1\leqslant k\leqslant n+1$);

(5)A_5:第 k 次摸球时第 1 次摸到黑球且第 $2n$ 次摸到白球($1\leqslant k\leqslant n$);

(6)A_6:第 k 次摸球时第 2 次摸到黑球($2\leqslant k\leqslant n+2$).

分析 这是一个用古典概率解决的问题．首先要选择适合解决这个问题的试验和样本空间,其次要正确算出基本事件总数和诸有关事件的有利场合数．

解 把 n 只黑球和 n 只白球都编上不同的号码．将摸出的 $2n$ 只球依次放在排成一直线的 $2n$ 个位置上,就是试验的一个可能的结果,即为一个基本事件．由此可知基本事件总数为 $(2n)!$．这些基本事件发生是等可能的．

(1)A_1 的有利场合数可如下计算:在第 1、3、…、$2n-1$ 个位置上分别放黑球,有 $n!$ 种放法;在第 2、4、…、$2n$ 个位置上分别放白球,也有 $n!$ 种放法．这样黑、白球恰好相间的放法为 $n!\times n!$ 种．还有在第 1、3、…、$2n-1$ 个位置上分别放白球,在第 2、4、…、$2n$ 个位置上分别放黑球,这样黑、白球恰好相间的放法也为 $n!\times n!$ 种．故 A_1 的有利场合数为 $2\times n!\times n!$.

于是所求概率为 $P(A_1)=\dfrac{2\times n!\times n!}{(2n)!}=\dfrac{2}{C_{2n}^n}$.

(2)A_2 的有利场合数可如下计算:n 只白球任意放在 n 个位置上有 $n!$ 种放法．对于每一种这样的放法,认为每两只相邻的白球之间各有一空隙,再加第一只白球之前和第 n 只白球之后,认为共有 $n+1$ 个空隙．从这 $n+1$ 个空隙中任取 n 个放置 n 只黑球有 A_{n+1}^n 种放法．故 A_2 的有利场合数为 $n!\times A_{n+1}^n$.

于是所求概率为 $P(A_2)=\dfrac{n!\times A_{n+1}^n}{(2n)!}=\dfrac{n+1}{C_{2n}^n}$.

(3)A_3 的有利场合数可如下计算:将 n 只黑球看成为“一只球”,与 n 只白球合起来共有 $n+1$ 只,将它们任意放置为一列有 $(n+1)!$ 种放法．对于每一种这样的放法 n 只黑球又可以任意放置为一列有 $n!$ 种放法．故 A_3 的有利场合数为 $(n+1)!\times n!$．

于是所求概率为 $P(A_3)=\dfrac{(n+1)!\times n!}{(2n)!}=\dfrac{n+1}{C_{2n}^n}$.

(4)A_4 的有利场合数可如下计算:从 n 只白球中摸出 $k-1$ 只放在前 $k-1$ 个位置上有 A_n^{k-1} 种放法,从 n 只黑球中摸出 1 只放在第 k 个位置上有 A_n^1 种放法,再将剩下的 $(2n-k)$ 个球摸出放在剩下的 $(2n-k)$ 个位置上有 $(2n-k)!$ 种放法．故 A_4 的有利场合数为 $A_n^{k-1}\times A_n^1\times(2n-k)!$．

于是所求概率为 $P(A_4)=\dfrac{A_n^{k-1}\times A_n^1\times(2n-k)!}{(2n)!}=\dfrac{A_n^{k-1}\times A_n^1}{A_{2n}^k}$.

(5)注意到第 $2n$ 次要摸白球,因此要从 n 只白球中摸出 1 只放在第 $2n$ 个位置上,再考虑从 $n-1$ 只白球中摸出 $k-1$ 只放在前 $k-1$ 个位置上．仿(4)可得 A_5 的有利场合数为 $A_{n-1}^{k-1}\times$

$A_n^1\times[2n-(k+1)]!\ \times A_n^1$.

于是所求概率为 $P(A_5)=\dfrac{A_{n-1}^{k-1}\times A_n^1\times[2n-(k+1)]!\ \times A_n^1}{(2n)!}=\dfrac{A_n^kA_n^1}{A_{2n}^{k+1}}$.

(6)注意到前 $k-1$ 次摸到 $k-2$ 只白球和 1 只黑球，放在前 $k-1$ 个位置上有 $C_n^{k-2}\times C_n^1\times(k-1)!$ 种放法，第 k 次摸到 1 只黑球放在第 k 个位置上有 A_{n-1}^1 种放法．仿(4)可得 A_6 的有利场合数为 $C_n^{k-2}\times C_n^1\times(k-1)!\ \times A_{n-1}^1\times(2n-k)!$．

于是所求概率为 $P(A_6)=\dfrac{C_n^{k-2}\times C_n^1\times(k-1)!\ \times A_{n-1}^1\times(2n-k)!}{(2n)!}$

$$=\frac{C_n^{k-2}\times C_n^1\times(k-1)!\ \times A_{n-1}^1}{A_{2n}^k}.$$

5. 有 r 个人，每人都以 $\dfrac{1}{n}$ 的概率分配到 n 个房间中的任意一间(每间房容纳人数不限，$r\leqslant n$)．试求下列事件的概率．

(1)A_1：某指定的 r 个房间各有 1 人；

(2)A_2：恰有 r 个房间各有 1 人；

(3)A_3：某指定的一个房间恰有 i 个人$(0\leqslant i\leqslant r)$；

(4)A_4：恰好有一个房间有 2 个人，其余的每个房间不多于 1 个人；

(5)A_5：恰好有两个房间有人；

(6)A_6：某指定的一个房间中不多于 2 个人；

(7)A_7：至少有一个房间多于 1 个人．

解 把 r 个人分配到 n 个房间的一种分法就是试验的一个可能的结果，即为一个基本事件．由此可知基本事件总数为 n^r．这些基本事件发生是等可能的．

(1)A_1 的有利场合数可如下计算：第 1 个人可分配到指定的 r 个房间中的任意一间，有 r 种分法；第 2 个人可分配到指定的 r 个房间中剩下的 $r-1$ 个房间中的任意一间，有 $r-1$ 种分法；…，等等．故 A_1 的有利场合数为 $r!$．

于是所求概率为 $P(A_1)=\dfrac{r!}{n^r}$.

(2)A_2 的有利场合数可如下计算：第 1 个人可分配到 n 个房间中的任意一间有 n 种分法；第 2 个人可分配到剩下的 $n-1$ 个房间中的任意一间有 $n-1$ 种分法…等等．故 A_2 的有利场合数为 A_n^r.

由于 A_2 也可等价地叙述为：n 个房间中任意的 r 个房间各有 1 人．注意到 A_2 与 A_1 的区别，故 A_2 的有利场合数也可表示为 $C_n^r\times r!\ =A_n^r$.

于是所求概率为 $P(A_2)=\dfrac{A_n^r}{n^r}$.

(3)A_3 的有利场合数可如下计算：先从 r 个人中任取 i 个人共有 C_r^i 种取法；对于每一种这样取出的 i 个人将他们分配到某指定的那个房间有 1 种分法；再把剩下的$(r-i)$个人任意分配到 $n-1$ 个房间去有 $(n-1)^{r-i}$ 种分法．故 A_3 的有利场合数为 $C_r^i\times1\times(n-1)^{r-i}=C_r^i(n-1)^{r-i}$.

于是所求概率为 $P(A_3)=\dfrac{C_r^i(n-1)^{r-i}}{n^r}$.

(4) A_4 的有利场合数可如下计算:先从 n 个房间中任取一间有 C_n^1 种取法;再从 r 个人中任取 2 个人有 C_r^2 种取法;对于每一种这样取出的 2 个人分配到任取出的那一间房中去有 1 种分法;最后将剩下的 $(r-2)$ 个人分配到 $n-1$ 个房间中去且每间最多 1 人,由 A_2 的有利场合数的计算可知有 A_{n-1}^{r-2} 种分法．故 A_4 的有利场合数为 $C_n^1C_r^2A_{n-1}^{r-2}$.

于是所求概率为 $P(A_4)=\dfrac{C_n^1C_r^2A_{n-1}^{r-2}}{n^r}$.

(5) A_5 的有利场合数可如下计算:从 n 个房间中任取两间有 C_n^2 种取法;对于每一种这样的取法将 r 个人分配到这两间房的分法为 2^r 种,但这里面包含了有一个房间空(即 r 个人都分配到一个房间)的 2 种分法,要使这两间房都有人应去掉这 2 种分法．故 A_5 的有利场合数为 $C_n^2(2^r-2)$.

于是所求概率为 $P(A_5)=\dfrac{C_n^2(2^r-2)}{n^r}$.

(6) 设 B_i 为某指定房间恰有 i 个人 $(i=0,1,2)$,则 $A_6=B_0\cup B_1\cup B_2$ 且 B_0、B_1、B_2 互不相容．由概率的有限可加性和本题的(3)知,所求概率为

$$P(A_6)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)=\frac{1}{n^r}[(n-1)^r+C_r^1(n-1)^{r-1}+C_r^2(n-1)^{r-2}].$$

(7) 由 $\overline{A}_7=A_2$ 知,所求概率为

$$P(A_7)=1-P(A_2)=1-\frac{A_n^r}{n^r}.$$

6. 甲、乙二人进行一种游戏,规则如下:每掷一次(均匀的)硬币,正面朝上时甲得 1 分乙得 0 分;反面朝上时甲得 0 分乙得 1 分;直到谁先得到规定的分数为赢,赢者获奖品．当游戏进行到甲还差 2 分、乙还差 3 分就分别达到规定的分数时,因故游戏停止．问此时如何分奖品给甲、乙才算公平．

分析 为了确保公平,设想把游戏进行到能分出输赢为止．在所得到的各种可能结果中看甲赢和乙赢的有利场合数各是多少,按甲、乙所赢的概率之比分奖品是公平的．

解 为了能分出输赢还要掷硬币 $2+3-1=4$ 次(少于 4 次,有些情形分不出输赢),所有可能结果即基本事件总数为 $2^4=16$,这些基本事件发生是等可能的．

甲赢即正面朝上至少 2 次,甲赢的有利场合数为 $C_4^2+C_4^3+C_4^4=11$,故 $P(甲赢)=\dfrac{11}{16}$.

乙赢即反面朝上至少 3 次,乙赢的有利场合数为 $C_4^3+C_4^4=5$,故 $P(乙赢)=\dfrac{5}{16}$.

按 11:5 分奖品,对甲、乙二人是公平的．

注:此题是历史上有名的得分问题,也称分赌注问题．上述解法是应用古典概率解决实际问题的一个典型例子．

7. n 双不同的鞋子共 $2n$ 只,随机地把它们分成 n 个两只鞋,求这 n 个两只鞋恰好为 n 双鞋(事件 A)的概率．

解 法 1 将 $2n$ 只鞋由左至右排在一条直线的 $2n$ 个位置上,每一个这样的排法就是试验的一个可能的结果,即为一个基本事件．故基本事件总数为 $(2n)!$．这些基本事件发生是等可能的．

A 的有利场合数可如下计算:第一个位置上的鞋可从 $2n$ 只鞋中任取 1 只有 $2n$ 种取法,

第二个位置上的鞋只能与第一个位置上的那只鞋配对才行只有 1 种取法；第三个位置上的鞋可从 $(2n-2)$ 只鞋中任取 1 只有 $(2n-2)$ 种取法，第四个位置上的鞋只能与第三个位置上的那只鞋配对才行只有 1 种取法……等等．由此可知，奇数号位置上的鞋依次有 $2n$、$(2n-2)$、…、2 种取法，偶数号位置上的鞋都只有 1 种取法．故 A 的有利场合数为 $2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2=(2n)!!$．

于是所求概率为 $P(A)=\dfrac{(2n)!!}{(2n)!}=\dfrac{2^n\times n!}{(2n)!}$．

法 2　设 A_i 为第 i 个两只鞋恰成一双鞋 $(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

第一个两只鞋恰成一双的概率可如下计算：第一个两只鞋可以 $2n$ 只鞋中任取 2 只有 C_{2n}^2 种取法；A_1 的有利场合数是，从 n 只左脚的鞋中任取 1 只有 C_n^1 种取法，再取 1 只与已取的左脚的鞋配对的右脚的鞋只有 1 种取法；故所求的概率为 $P(A_1)=\dfrac{C_n^1}{C_{2n}^2}$．

在第一个两只鞋为一双的条件下，第二个两只鞋也为一双的概率可如下计算：第二个两只鞋可从 $(2n-2)$ 只鞋中任取 2 只有 C_{2n-2}^2 种取法；第二个两只鞋为一双，即从 $n-1$ 只左脚的鞋中任取 1 只有 C_{n-1}^1 种取法，再取 1 只与已取的左脚的鞋配对的右脚的鞋只有 1 种取法；故所求的概率为 $P(A_2|A_1)=\dfrac{C_{n-1}^1}{C_{2n-2}^2}$．

依此类推可知：$P(A_3|A_1A_2)=\dfrac{C_{n-2}^1}{C_{2n-4}^2},\cdots,P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})=\dfrac{C_1^1}{C_2^2}$．

由 n 个事件的乘法公式知，所求的概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=\frac{C_n^1}{C_{2n}^2}\times\frac{C_{n-1}^1}{C_{2n-2}^2}\times\cdots\times\frac{C_1^1}{C_2^2}=\frac{2^n\times n!}{(2n)!}.\end{aligned}$$

8.　从 0 至 9 这 10 个数字中任取 4 个数字由左至右排成一列，问能排成四位数的偶数（事件 A）的概率是多少．

分析　把一个事件表示为容易求出概率的一些事件的运算，这是求事件概率的一个重要的方法．

解　从 0 至 9 这 10 个数字中任取 4 个数字由左至右排成一列，每一个这样的排列就是试验的一个可能的结果，即一个基本事件．故基本事件总数为 A_{10}^4．这些基本事件发生是等可能的．

法 1　设 A_1 为千位数字为奇数的四位数的偶数，A_2 为千位数字为偶数的四位数的偶数．则 $A=A_1\cup A_2$，$A_1\cap A_2=\varnothing$．

A_1 的有利场合数可如下计算：从 5 个奇数中任取 1 个放在千位有 C_5^1 种取法；从 5 个偶数中任取 1 个放在个位有 C_5^1 种取法；再从剩下的 8 个数字中任取 2 个一个放在百位一个放在十位有 A_8^2 种取法；故 A_1 的有利场合数为 $C_5^1A_8^2C_5^1$．

注意到千位上的数字不能是 0，仿上面的讨论可得 A_2 的有利场合数为 $C_4^1A_8^2C_4^1$．

于是 $P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

$$=\frac{1}{A_{10}^4}[C_5^1A_8^2C_5^1+C_4^1A_8^2C_4^1]=\frac{41}{90}.$$

法 2 设 B_1:任取 4 个数字由左至右排成一列且个位数字为偶数,

B_2:任取 4 个数字由左至右排成一列且个位数字为偶数千位数字为 0.

则 $A=B_1-B_2, B_1\supset B_2$.

仿法 1 中的讨论可知:B_1 的有利场合数为 $A_9^3C_5^1$,B_2 的有利场合数为 $C_1^1A_8^2C_4^1$.

于是 $P(A)=P(B_1-B_2)=P(B_1)-P(B_2)=\frac{1}{A_{10}^4}[A_9^3C_5^1-A_8^2C_4^1]=\frac{41}{90}$.

9. 掷一枚均匀的骰子 n 次,求出现的点数之积能被 10 整除的概率.

解 仿典型例题 5 知,基本事件总数为 6^n. 这些基本事件发生是等可能的.

设 A:掷骰子 n 次出现点数之积能被 10 整除,

B:掷骰子 n 次至少出现一次 5 点,

C:掷骰子 n 次至少出现一次偶数点.

则 $A=BC$,从而有 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$.

又 $\overline{B}$:掷骰子 n 次不出现 5 点,即出现 1、2、3、4、6 点,

$\overline{C}$:掷骰子 n 次不出现偶数点,即出现 1、3、5 点,

$\overline{B}\,\overline{C}$:掷骰子 n 次不出现 5 点又不出现偶数点,即出现 1、3 点.

由上述讨论易知:$\overline{B}$ 的有利场合数为 5^n,$\overline{C}$ 的有利场合数为 3^n,$\overline{B}\,\overline{C}$ 的有利场合数为 2^n.

于是所求概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(BC)=1-P(\overline{BC})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})\\&=1-[P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\,\overline{C})]\\&=1-\frac{1}{6^n}[5^n+3^n-2^n].\end{aligned}$$

现在介绍组合计数中常用的一个公式.

将 n 个不同的对象分成 k 组,第一组为 r_1 个,第二组为 r_2 个,…,第 k 组为 r_k 个($r_1+r_2+\cdots+r_k=n$),则不同的分法为

$$\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots\ r_k!}. \tag{1.33}$$

式(1.33)可如下证明:先从 n 个对象中任取 r_1 个为第一组,从剩下的 $(n-r_1)$ 个中任取 r_2 为第二组,…,最后从剩下的 $n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}=r_k$ 个中任取 r_k 个为第 k 组,由组合的概念知所有不同的分法为

$$\begin{aligned}&C_n^{r_1}\times C_{n-r_1}^{r_2}\times\cdots\times C_{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}^{r_k}\\&=\frac{n!}{r_1!\ (n-r_1)!}\times\frac{(n-r_1)!}{r_2!\ (n-r_1-r_2)!}\times\cdots\times\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1})!}{r_k!\ (n-r_1-r_2-\cdots-r_k)!}\\&=\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots\ r_k!}\end{aligned}$$

下面的典型例题 10 要用到式(1.33).

10. 将含有 3 名优秀生的 15 名学生随机地分成三个 5 人小组. 求下列事件的概率.

(1)A:每个小组各有 1 名优秀生;

(2)B:3 名优秀生分到一个小组;

(3) C:3 名优秀生有 2 名分到一个小组,另一名分到另一个小组.

解 由式(1.33)知,15 名学生随机地分成三个 5 人小组所有不同的分法为$\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}$,这就是基本事件总数.这些基本事件发生是等可能的.

(1) A 的有利场合数可如下计算:将 3 名优秀生分到三个小组每组 1 人的分法总数为 3!;12 名其他学生分成三个 4 人组的所有分法为$\frac{12!}{4!\ 4!\ 4!}$.故 A 的有利场合数为 $3!\times\frac{12!}{4!\ 4!\ 4!}$.于是所求概率为

$$P(A)=\frac{3!\times 12!}{4!\ 4!\ 4!}\Big/\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}=\frac{25}{91}.$$

(2) B 的有利场合数可如下计算:将 12 名其他学生分成 2 个人、5 个人、5 个人的三个组的所有分法为$\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}+\frac{12!}{5!\ 2!\ 5!}+\frac{12!}{5!\ 5!\ 2!}$(第一项表示第一组为 2 人,第二、三组各 5 人;第二项表示第二组为 2 人,第一、三组各 5 人;第三项表示第三组为 2 人,第一、二组各 5 人.)哪一组为 2 人,3 名优秀生就分到这个组,只有 1 种分法.故 B 的有利场合数为$\frac{12!}{2!\ 5!\ 5!}\times 3$.于是所求概率为

$$P(B)=\frac{12!\times 3}{2!\ 5!\ 5!}\Big/\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}=\frac{6}{91}.$$

(3) C 的有利场合数可如下计算:将 12 名其他学生分成 3 个人、4 个人、5 个人的三个组(考虑到组的序号)的所有分法为$\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}\times 3!$,将 3 名优秀生分成 2 个人、1 个人的二个组有 C_3^2 种分法,对于每一种这样的分法将 2 名优秀生分到 3 个人的那个组,将另 1 名优秀生分到 4 个人的那个组,只有 1 种分法.故 C 的有利场合数为$\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}\times 3!\times C_3^2$.于是所求概率为

$$P(C)=\frac{12!\times 3!\times C_3^2}{3!\ 4!\ 5!}\Big/\frac{15!}{5!\ 5!\ 5!}=\frac{60}{91}.$$

11. 某楼一层有 3 部电梯,今有 5 人要乘电梯.假定每个人选择哪部电梯是随机的.求这 3 部电梯每部都有人的概率.

解 仿典型例题 5 知,基本事件总数为 3^5.这些基本事件发生是等可能的.

设 A:3 部电梯每部都有人.

法 1 再设 A_1:3 部电梯中一部有 3 人,另两部各有 1 人,

A_2:3 部电梯中一部有 1 人,另两部各有 2 人.

则 $A=A_1\cup A_2$,且 $A_1A_2=\varnothing$.

A_1 的有利场合数可如下计算:将 5 个人分成 3 个人、1 个人、1 个人的三个组(考虑到组的序号)的所有分法为$\frac{5!}{3!\ 1!\ 1!}\times 3$,约定第 i 组的人进入第 i 部电梯($i=1,2,3$),这样对分好的三个组进入 3 部电梯的方法只有 1 种.故 A_1 的有利场合数为$\frac{5!}{3!\ 1!\ 1!}\times 3$.

同理可得 A_2 的有利场合数为$\frac{5!}{1!\ 2!\ 2!}\times 3$.

于是所求概率为

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

$$=\frac{1}{3^5}\left(\frac{5!}{3!\ 1!\ 1!}\times 3+\frac{5!}{1!\ 2!\ 2!}\times 3\right)=\frac{50}{81}.$$

法 2 再设 B:3 部电梯中至少有 1 部无人,

B_i:3 部电梯中第 i 部无人,($i=1,2,3$).

则 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{3}B_i$,$B_1$、$B_2$、$B_3$ 不互不相容.

故 $P(B)=P(\bigcup\limits_{i=1}^{3}B_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}P(B_iB_j)+P(B_1B_2B_3)$.

仿典型例题 9 知

$$P(B_i)=\frac{(3-1)^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5, i=1,2,3.$$

$$P(B_iB_j)=\frac{(3-2)^5}{3^5}=\left(\frac{1}{3}\right)^5, 1\leqslant i<j\leqslant 3.$$

$$P(B_1B_2B_3)=0.$$

又 $A=\overline{B}$,于是所求概率为

$$P(A)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\times 3+\left(\frac{1}{3}\right)^5\times 3=\frac{50}{81}.$$

注:当电梯为 m 部乘电梯的人数为 $n(n\geqslant m)$时,仍可用法 2 求此题的解.

12. ([1]1.31)* 袋中有 4 个球分别编有号码 1、2、3、4. 从袋中随机地取球每次取 1 个(取后不放回),共取 4 次. 求 4 次取球中至少有一次取得的球的号码恰与取球的次数相同的概率.

解 把 4 个编号的球随机地一一取出依次放在一直线的 4 个位置上就是试验的一个可能结果,即基本事件. 由此可知基本事件总数为 4!. 这些基本事件发生是等可能的.

设 A:4 次取球中至少有一次取得的球的号码恰与取球的次数相同.

法 1 再设 B:4 次取球中每次取得的球的号码与取球的次数都不相同.

B 的有利场合可分三种情况分别计算:当第一次取 2 号球时,有 3 个基本事件②③④①、②④①③、②①④③属于 B(②③④①表示第一次取 2 号球,第二次取 3 号球,第三次取 4 号球,第四次取 1 号球,其余类推);同理,当第一次取 3 号球和第一次取 4 号球时,都各有 3 个基本事件属于 B. 故 B 的有利场合数为 3×3.

又 $A=\overline{B}$,于是所求概率为

$$P(A)=P(\overline{B})=1-P(B)=1=\frac{3\times 3}{4!}=\frac{5}{8}.$$

法 2 再设 B_i:4 次取球中恰有 i 次取得的球的号码与取球的次数相同($i=1,2,3,4$).

则 B_1、B_2、B_3、B_4 互不相容且 $B_3=\varnothing$,

又 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{4}B_i$

B_1 的有利场合可分四种情况分别计算:当第一次取 1 号球时,有 2 个基本事件①③④②、①④②③属于 B_1;同理,当第二次取 2 号球、第三次取 3 号球和第四次取 4 号球时,都各有 2 个基本事件属于 B_1. 故 B_1 的有利场合数为 2×4.

---

* 即参考书目[1]的习题 1.31.

B_2 的有利场合数可如下计算:4 次取球中恰有 2 次球的号码与取球的次数相同有 C_4^2 种可能,其余 2 次球的号码必须与取球的次数不同这只有 1 种可能．故 B_2 的有利场合数为 $C_4^2=6$.

$B_3=\varnothing$,故 B_3 的有利场合数为 0.

显然,B_4 的有利场合数为 1.

于是所求概率为

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{4}B_i)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)=\frac{1}{4!}(2\times4+6+0+1)=\frac{5}{8}.$$

法 3 再设 A_i:第 i 次取球时恰好取到 i 号球($i=1,2,3,4$),则

$$A=\bigcup_{i=1}^{4}A_i.$$

于是 $P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)$

$$=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant4}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant4}P(A_iA_jA_k)-P(A_1A_2A_3A_4).$$

又 $P(A_i)=\frac{1\times3!}{4!}=\frac{1}{4}$,($i=1,2,3,4$).

$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j|A_i)=\frac{1}{4}\times\frac{1\times2!}{3!}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$. $(1\leqslant i<j\leqslant4)$

$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j|A_i)P(A_k|A_iA_j)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2!}$. $(1\leqslant i<j<k\leqslant4)$

$P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{4!}$.

综合上述结果,所求概率为

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=C_4^1\times\frac{1}{4}-C_4^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+C_4^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}.$$

注:当球的个数 $n>4$ 时,仍可用法 3 求此题的解．

小结 求事件的古典概率应注意两点．

①选择适合解决该问题的试验与样本空间,正确算出基本事件总数、有关事件的有利场合数,避免重复计算或漏算．请参看典型例题中的 4 题、5 题、10 题和问题与思考中的 3 题．

②利用事件之间的关系与运算,把所求概率的事件表示为容易求出其概率的一些事件的运算,再利用概率的性质计算出所求的概率．请参看典型例题中的 8 题、9 题、11 题和 12 题．

13. 一个袋子装有 n 个球,分别标有号码 1、2、…n. 今从袋中有放回地取 k 次球,每次取 1 个．求所取的 k 个球的号码最大者为 $m(1\leqslant m\leqslant n)$的概率．

分析 将“所取的 k 个球的号码最大者为 m”这个事件表示为易求出概率的一些事件的运算,是求解此题的关键．

解 仿典型例题 5 知,基本事件总数为 n^k,这些基本事件发生是等可能的．

法 1 设 A:所取的 k 个球的号码最大者为 m,

B_i:所取的 k 个球中恰有 i 个号码为 m,其余的号码都小于 m,$i=1,2,\cdots,k$,

则 $A=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$,且 B_1、B_2、…、B_k 互不相容．

又 B_i 的有利场合数可如下计算：在 k 次取球中任意选择 i 次有 C_k^i 种可能，这 i 次取球的号码都为 m 只有 1 种可能，剩下的 $(k-i)$ 次取球，球的号码可在 1 至 $(m-1)$ 中任取，有 $(m-1)^{k-i}$ 种可能．故 B_i 的有利场合数为 $C_k^i\times 1\times(m-1)^{k-i}$.

于是所求概率为

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{k}B_i)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)=\frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(m-1)^{k-i}$$
$$=\frac{1}{n^k}\left[\sum_{i=0}^{k}C_k^i(m-1)^{k-i}-C_k^0(m-1)^k\right]$$
$$=\frac{1}{n^k}[m^k-(m-1)^k].$$

法 2 再设 A_i：所取的 k 个球的号码都不超过 i，$i=m-1$、m，

则 $A=A_m-A_{m-1}$，且 $A_m\supset A_{m-1}$.

仿法 1 知 $P(A_m)=\frac{m^k}{n^k}$，$P(A_{m-1})=\frac{(m-1)^k}{n^k}$.

于是所求概率为

$$P(A)=P(A_m-A_{m-1})=P(A_m)-P(A_{m-1})$$
$$=\frac{1}{n^k}[m^k-(m-1)^k].$$

14. 10 件产品中有 4 件不合格，从中任取 2 件．已知所取的 2 件中有 1 件是不合格品，求另 1 件也是不合格品的概率．

分析 此题是求条件概率．关键是正确理解“已知所取的 2 件中有 1 件是不合格品”这句话的含义，这句话等价于“已知所取的 2 件中至少有 1 件是不合格品”.

解 设 B：所取的 2 件中有 1 件是不合格品，即所取的 2 件中至少有 1 件是不合格品，

A：所取的 2 件中另 1 件也是不合格品，即所取的 2 件都是不合格品．

由古典概率知：

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}.$$

又 $B\supset A$，于是所求概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{5}.$$

15. 一次掷 10 颗骰子，已知至少出现了一个 1 点，求至少出现两个 1 点的概率．

解 设 A：掷 10 颗骰子至少出现一个 1 点，

B：掷 10 颗骰子至少出现两个 1 点，

C：掷 10 颗骰子恰好出现一个 1 点，

则 $B=A-C$，且 $A\supset B$，$A\supset C$.

由古典概率知：$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5^{10}}{6^{10}}$，$P(C)=\frac{10\times 5^9}{6^{10}}$.

又 $P(B)=P(A)-P(C)$，于是所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1-\frac{5^{10}}{6^{10}}-\frac{10\times 5^9}{6^{10}}}{1-\frac{5^{10}}{6^{10}}}=\frac{6^{10}-3\times 5^{10}}{6^{10}-5^{10}}.$$

16. 袋中有白球、黑球各一个，每次从袋中摸出一球不放回，再放入一个白球．求第 n 次摸球时摸到白球的概率．

解 设 A_i：第 i 次摸球时摸到白球，$i=1、2、\cdots、n$，则所求概率为 $P(A_n)$．

依题意知，$\overline{A}_n$：第 n 次摸到黑球，即前 $(n-1)$ 次摸到的都是白球，第 n 次摸到黑球，即

$$\overline{A}_n=A_1A_2\cdots A_{n-1}\overline{A}_n.$$

由概率的性质和乘法公式得

$$\begin{aligned}P(A_n)&=1-P(\overline{A}_n)=1-P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\overline{A}_n)\\&=1-P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(\overline{A}_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.\end{aligned}$$

17. 已知 $P(A)=a,P(B)=b,P(B|\overline{A})=c$，且 $a<1,b<1$．求 $P(A\cup B)$、$P(A|\overline{B})$．

分析 考虑到题目所给的条件，用关系式 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$ 求 $P(A\cup B)$ 较简便．

解：由 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$ 且 A、$\overline{A}B$ 互不相容，得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=a+(1-a)c.\end{aligned}$$

又 $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})}=\dfrac{(1-a)(1-c)}{1-b}$，

于是，
$$P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-\frac{(1-a)(1-c)}{1-b}.$$

或由 $A\overline{B}=(A\cup B)-B$ 且 $A\cup B\supset B$，有

$$\begin{aligned}P(A|\overline{B})&=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A\cup B)-P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{a+(1-a)c-b}{1-b}\\&=1-\frac{(1-a)(1-c)}{1-b}.\end{aligned}$$

18. 盒中有 12 个乒乓球，其中 9 个是没有用过的．第一次比赛时从盒中任取 3 个球，都用过后仍放入盒内；第二次比赛时再从盒中任取 3 个球．求第二次比赛时所取得的 3 个球都是没有用过的概率．

分析 这是一道较典型的用全概率公式求解的题目．在解题中用到了两个组合公式进行计算上的化简．

解 设 A：第二次比赛时任取的 3 个球都是没有用过的，

B_i：第一次比赛时任取的 3 个球中恰有 i 个是没有用过的，$i=0、1、2、3$，

则 B_0、B_1、B_2、B_3 为一完备事件组．

由古典概率知：

$$P(B_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3},P(A|B_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3},$$

于是由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{(C_{12}^3)^2}\sum_{i=0}^{3}C_9^iC_3^{3-i}C_{9-i}^3\\&=\frac{C_9^3}{(C_{12}^3)^2}\sum_{i=0}^{3}C_6^iC_3^{3-i}=\frac{(C_9^3)^2}{(C_{12}^3)^2}=\left(\frac{21}{55}\right)^2\approx0.146.\end{aligned}$$

在上述推导中，用到了两个组合公式：

$$C_9^i C_{9-i}^3 = C_9^3 C_6^i;$$

$$\sum_{i=0}^{3} C_6^i C_3^{3-i} = C_9^3.$$

19. 设昆虫产 n 个卵的概率为 $p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$，$n=0、1、\cdots$，其中常数 $\lambda>0$. 又设一个虫卵能孵化为昆虫的概率为 $p(0<p<1)$，且卵的孵化是相互独立的．求此昆虫的下一代为 m 条的概率．

解 设 A：此昆虫的下一代为 m 条，

B_n：此昆虫产 n 个卵，$n=0、1、2、\cdots$

则 $B_0、B_1、B_2、\cdots$为一完备事件组，且

$$P(B_n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n=0、1、2、\cdots$$

由伯努利概型和题目的实际意义知，

$$P(A \mid B_n) = \begin{cases} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, & n \geqslant m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

于是由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) P(A \mid B_n) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

20. 甲、乙二人分别独立地掷一枚均匀的硬币，其中甲掷 $n+1$ 次，乙掷 n 次．求“甲掷出正面的次数大于乙掷出正面的次数”这一事件的概率．

解 **法 1** 引入记号

$甲_{正}、甲_{反}$：分别为在 $n+1$ 次投掷中甲掷出正面、反面的次数，

$乙_{正}、乙_{反}$：分别为在 n 次投掷中乙掷出正面、反面的次数，

$甲'_{正}、甲'_{反}$：分别为在 n 次投掷中甲掷出正面、反面的次数．

设 $A=\{甲_{正}>乙_{正}\}$，

$B_1=\{甲'_{正}>乙_{正}\}$，$B_2=\{甲'_{正}<乙_{正}\}$，$B_3=\{甲'_{正}=乙_{正}\}$，则 $B_1、B_2、B_3$ 为一完备事件组．

再设 $P(B_1)=p$，根据对称性知 $P(B_2)=P(B_1)=p$，于是 $P(B_3)=1-2p$.

又 $P(A \mid B_1)=1$，$P(A \mid B_2)=0$，$P(A \mid B_3)=\frac{1}{2}$，

于是由全概率公式，得

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(A \mid B_i) = p + 0 + (1-2p) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

法 2 沿用法 1 中的记号，所求概率为

$$P(A)=P\{甲_{正}>乙_{正}\}$$

又$\overline{\{甲_{正}>乙_{正}\}}=\{甲_{正}\leqslant乙_{正}\}=\{甲_{反}>乙_{反}\}$

上式最后一步可由下列方程组得出：

$$\begin{cases}甲_{正}+甲_{反}=n+1\\ 乙_{正}+乙_{反}=n\end{cases}$$

因为硬币是均匀的，由正、反面的对称性有

$$P\{甲_{正}>乙_{正}\}=P\{甲_{反}>乙_{反}\},$$

所以

$$\begin{aligned}P\{甲_{正}>乙_{正}\}&=1-P\overline{\{甲_{正}>乙_{正}\}}=1-P\{甲_{反}>乙_{反}\}\\&=1-P\{甲_{正}>乙_{正}\},\end{aligned}$$

于是 $P\{甲_{正}>乙_{正}\}=\dfrac{1}{2}$.

小结 由上述三个典型例题的解题过程，我们可以归纳出用全概率公式求解的题目的共同点．一般而言，如果一个题目具备以下三条：

①此题是求一个事件(设为 A)的概率；

②由题目所给出的条件能找出 A 发生的各种"可能的原因"或"可能的前提条件"所构成的诸事件(可能是有限多个，设为 B_1、B_2、…、B_n；也可能是可列无穷多个，设为 B_1、B_2、…)为一完备事件组；

③由题目所给出的条件能求出 $P(B_i)$以及 $P(A|B_i)$.

那么这个题目就可以用全概率公式来求解．

21. 有一台半自动机床生产某产品．已知在机床安装正确且不论前 k 个产品是否合格的条件下，第 $k+1$ 个产品合格的概率都是 0.90；在机床安装不正确且不论前 k 个产品是否合格的条件下，第 $k+1$ 个产品合格的概率都是 0.30($k=0$、1、2、…)．又知机床安装正确的概率为 0.75.

若已知生产的第一个产品是合格品，求此时机床安装正确的概率；继续生产又连续得到 2 个合格品，求此时机床安装正确的概率．

解 设 A：机床安装正确，

B_{k+1}：第 $k+1$ 个产品合格，$k=0$、1、2、…

则 A 与 $\overline{A}$ 为一完备事件组．

依题意有：$P(A)=0.75$，$P(\overline{A})=0.25$，

$P(B_{k+1}|AC_1C_2\cdots C_k)=0.90$，$P(B_{k+1}|\overline{A}C_1C_2\cdots C_k)=0.30$，其中 C_i 为 B_i 或 $\overline{B}_i$，$i=1$、2、…、k，且 $P(B_1|A)=0.90$，$P(B_1|\overline{A})=0.30$.

所求为 $P(A|B_1)$和 $P(A|B_1B_2B_3)$.

由 Bayes 公式，得

$$P(A|B_1)=\frac{P(A)P(B_1|A)}{P(A)P(B_1|A)+P(\overline{A})P(B_1|\overline{A})}=\frac{0.75\times0.90}{0.75\times0.90+0.25\times0.30}=0.90.$$

而 $P(A|B_1B_2B_3)=\dfrac{P(AB_1B_2B_3)}{P(B_1B_2B_3)}=\dfrac{P(AB_1B_2B_3)}{P(AB_1B_2B_3)+P(\overline{A}B_1B_2B_3)}$.

由乘法公式，得

$P(AB_1B_2B_3)=P(A)P(B_1|A)P(B_2|AB_1)P(B_3|AB_1B_2)=0.75\times(0.90)^3$,

$P(\overline{A}B_1B_2B_3)=P(\overline{A})P(B_1|\overline{A})P(B_2|\overline{A}B_1)P(B_3|\overline{A}B_1B_2)=0.25\times(0.30)^3$，于是

$P(A|B_1B_2B_3)=\dfrac{0.75\times(0.90)^3}{0.75\times(0.90)^3+0.25\times(0.30)^3}=\dfrac{81}{82}=0.9878.$

22. 统计资料表明：在双胞胎中第 i 个婴儿为男孩的概率为 0.51，同性双胞胎比异性双胞胎多一倍．在已知一双胞胎第一个婴儿是男孩的条件下，求第二个也是男孩的条件概率．

解 设 A_i：双胞胎中第 i 个婴儿为男孩，$(i=1,2)$

依题意知：$P(A_i)=0.51, i=1,2$

$$P(A_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1,$$
$$P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=2[P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)],$$

从而得，$P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{2}{3}$.

又 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-P(A_1)-P(A_2)+P(A_1A_2)$,

于是有，$P(A_1A_2)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{3}-1+P(A_1)+P(A_2)\right]=\dfrac{103}{300}$.

所以所求条件概率为

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{103}{300}\times\frac{100}{51}=\frac{103}{153}.$$

23. 三个人相互独立地破译一密码．如果只有两人参加破译，三种可能的组合破译的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{7}{15}$ 和 $\dfrac{2}{5}$．求三人参加能破译的概率．

解 设 A、B、C 分别为甲、乙、丙破译密码．依题意知：A、B、C 相互独立，且

$$\frac{1}{2}=P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B}),$$
$$\frac{7}{15}=P(A\cup C)=1-P(\overline{A})P(\overline{C}),$$
$$\frac{2}{5}=P(B\cup C)=1-P(\overline{B})P(\overline{C}),$$

由上述三式可得：$P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\dfrac{2}{5}$,

于是所求概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\frac{3}{5}.$$

24. 甲、乙、丙三人进行比赛，每次比赛只有两人参加没有平局，比赛的胜者与未上场者进行下一次比赛，依次循环直至有一人连续胜 2 次比赛为止，则此人获得比赛的冠军．假定每次比赛双方取胜的概率都是 $\dfrac{1}{2}$．今规定甲、乙二人先进行比赛，求甲、乙、丙三人各获得冠军的概率．

分析 先将甲夺冠的可列无穷多种互不相容的情形列举出前几种，找出其规律．

设 A：甲夺冠，

A_i、B_j、C_k 分别为甲在第 i 次、乙在第 j 次、丙在第 k 次比赛中获胜．

依题意则有

$A=A_1A_2\cup B_1C_2A_3A_4\cup A_1C_2B_3A_4A_5\cup B_1C_2A_3B_4C_5A_6A_7\cup\cdots$

上述甲夺冠的可列无穷多种互不相容的情形中的每一种都有下述四个特点：

1° 任一字母左右两边的字母(如果有的话)是不相同的；

2° 除最后两个字母外，任意相邻的两个字母(如果有的话)是不相同的；

3° 字母总的个数(即甲夺冠所经过的比赛次数)不小于 2；

4° 字母总的个数不等于 $3k(k=1、2、\cdots)$.

上述特点 1°、2°、3°由题意易知．对于特点 4°，我们注意到上述甲夺冠的可列无穷多种互不相容的情形又可分为两类：

第一类，从第一次比赛算起三次相继的比赛为一组，则每组中的第一次比赛是甲获胜，有这样若干组，最后是甲连续胜两次比赛．在这一类中，字母总的个数为 $3r+2(r=0、1、2、\cdots)$.

第二类，第一、二次比赛分别是乙、丙获胜，从第三次比赛算起三次相继的比赛为一组，则每组中的第一次比赛是甲获胜，有这样若干组，最后是甲连续胜两次比赛．在这一类中，字母总的个数为 $2+3r+2=3(r+1)+1(r=0、1、2、\cdots)$.

综上所述，可见甲夺冠的可列无穷多种互不相容的情形中的每一种字母总的个数都不等于 $3k$.

经过这样的分析，求出甲夺冠的概率就不难了，进而可求出乙、丙夺冠的概率．

解 沿用上述分析中所引入的记号，依题意有：A_i、B_j、C_k 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_j)=P(C_k)=\frac{1}{2}$，于是

$$P(A)=P(A_1A_2)+P(B_1C_2A_3A_4)+P(A_1C_2B_3A_4A_5)+\cdots$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}.$$

由于甲、乙是对称的，甲、乙夺冠的概率是相等的，故 $P(B)=\frac{5}{14}$.

又甲、乙、丙均不夺冠可表示为

$$A_1C_2B_3A_4C_5B_6\cdots\cup B_1C_2A_3B_4C_5A_6\cdots$$

可见甲、乙、丙均不夺冠的概率为零，又甲、乙、丙夺冠是互不相容的，且它们的概率之和为 1，于是

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{2}{7}.$$

25. 甲、乙二人独立地各掷一枚均匀的硬币 n 次．求甲、乙二人掷出的正面次数相等的概率．

解 设 A：甲、乙掷出的正面次数相等．

A_i、B_i 分别为甲、乙掷出 i 次正面$(i=0、1、2、\cdots、n)$，则 $A=\bigcup_{i=0}^{n}A_iB_i$

依题意知，A_i、B_i 相互独立，$P(A_i)=P(B_i)=C_n^i\left(\frac{1}{2}\right)^n$，且 $A_iB_i\cap A_jB_j=\varnothing(i\neq j)$，于是

$$P(A)=\sum_{i=0}^{n}P(A_iB_i)=\sum_{i=0}^{n}P(A_i)P(B_i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}C_n^iC_n^i$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{i=0}^{n}C_n^iC_n^{n-i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^n.$$

26. 试验 E 是同时掷两枚均匀的骰子 1 次，将 E 在相同的条件下独立地重复地进行下去．求两枚骰子点数之和为 5 的结果出现在它们点数之和为 7 的结果之前的概率．

分析 解决此例题的关键是，用易算出其概率的一些事件及其运算表示"点数之和为 5 的结果出现在点数之和为 7 的结果之前"．

解 引入事件

A_n：前 $(n-1)$ 次试验中没出现点数之和为 5 或为 7 的结果，而在第 n 次试验时出现点数之和为 5 的结果． $n=1,2,\cdots$

特别地，A_1：第一次试验时出现点数之和为 5 的结果．

设 A 为所求概率之事件．

于是，有

$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，且 A_1、A_2、$\cdots$互不相容，

$P(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

为了求 $P(A_n)$，需分析一下 A_n 的结构．为此，再引入事件

B_{ij}：第 i 次试验时出现点数之和为 j，$i=1,2,\cdots,j=2,3,\cdots,12$.

则有 $A_n=B_{1j_1}B_{2j_2}\cdots B_{n-1j_{n-1}}B_{n5}$，

其中 $j_l\neq 5$ 或 7，$l=1,2,\cdots,n-1$.

又 $B_{lj_l}=\overline{B_{l5}\cup B_{l7}}$，$B_{l5}\cap B_{l7}=\varnothing$，$l=1,2,\cdots,n-1$

由古典概率知：$P(B_{l5})=\dfrac{4}{36}$，$P(B_{l7})=\dfrac{6}{36}$.

故 $P(B_{lj_l})=P(\overline{B_{l5}\cup B_{l7}})=1-P(B_{l5}\cup B_{l7})$

$=1-P(B_{l5})-P(B_{l7})=\dfrac{13}{18}$.

由试验的独立性知：

$P(A_n)=\prod\limits_{l=1}^{n-1}P(B_{lj_l})P(B_{n5})=\left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{9}$.

综上所述，有

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}=\frac{2}{5}.$$

27. 袋中有 M 只白球和 N 只黑球，每次从袋中随机地不放回地摸出一球之后再放入一黑球，这样继续下去，问第 k 次摸球时摸到黑球的概率是多少？

解 设 A_i：第 i 次摸到黑球，$i=1,2,\cdots$

令 $p_i=P(A_i)$，由全概率公式得：

$$P(A_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(\overline{A}_i)P(A_{i+1}|\overline{A}_i).\qquad(1)$$

由于不放回地摸出一球后总放入一黑球，故有

$$P(A_i)=P(A_{i+1}|A_i).\qquad(2)$$

$$P(A_{i+1}|\overline{A}_i)-P(A_{i+1}|A_i)=\frac{1}{M+N}.\qquad(3)$$

将(2)代入(3)得

$$P(A_{i+1}|\overline{A}_i)=p_i+\frac{1}{M+N}. \tag{4}$$

将(2)、(4)代入(1)得 $$p_{i+1}=\left(1-\frac{1}{M+N}\right)p_i+\frac{1}{M+N}. \tag{5}$$

又 $$p_1=\frac{N}{M+N}$$

于是得(一阶)差分方程 $$\begin{cases}p_{i+1}=Ap_i+B;\\ p_1=C.\end{cases} \tag{6}$$

其中 $A+B=1,B=\frac{1}{M+N},C=\frac{N}{M+N}$.

用递推的方法解(6)得

$$\begin{aligned}p_{i+1}&=Ap_i+B=A(Ap_{i-1}+B)+B=\cdots\\&=A^ip_1+(A^{i-1}+A^{i-2}+\cdots+1)B\\&=A^ip_1+\frac{A^i-1}{A-1}B\\&=A^ip_1-A^i+1=1-\left(1-\frac{1}{M+N}\right)^i\cdot\frac{M}{M+N},i=1,2,\cdots\end{aligned}$$

于是第 k 次摸球时摸到黑球的概率为 $p_k=1-(1-\frac{1}{M+N})^k\cdot\frac{M}{M+N}$.

28. 选择题,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的方括号内.

(1)设 A、B 为两个事件,若 $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$,则

(A)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　(B)$A\cup B$ 是必然事件

(C)$A\cup B$ 未必是必然事件　　(D)$P(\overline{A})=0$ 或 $P(\overline{B})=0$　　〔　　〕

(2)设 A、B 为两个事件,若 $P(A)\cdot P(B)>0$ 且 $AB=\varnothing$,则

(A)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　(B)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C)A 与 B 相互独立　　(D)$P(A-B)=P(A)$　　〔　　〕

(3)设 A、B 为两个事件,若 $P(A)>0,0<P(B)<1$,且 $P(B|A)=1$,则

(A)$P(A|\overline{B})=0$　(B)$P(A|B)=1$　(C)$AB\supset A$　(D)$B\supset A$　　〔　　〕

(4)设 A、B、C 为三个事件,若它们相互独立且 $0<P(A)<1,0<P(C)<1$,则下列四对事件中不相互独立的是:

(A)$\overline{A\cup B}$与 C　(B)$\overline{AC}$与 $\overline{C}$　(C)$\overline{AB}$与 C　(D)$\overline{A-B}$与 $\overline{C}$　　〔　　〕

解　(1)$\because \overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing$,即 $A\cup B=S$. $\therefore$ 选项(A)、(B)是等价的.从而它们都不能入选.

又 $\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A},\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{B}$,若 $P(\overline{A})=0$ 或 $P(\overline{B})=0$,则有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$. 但是,反之不然.举例如下.

设一几何概型的样本空间 $S=[0,1]$令 $\overline{A}=\left[0,\frac{1}{2}\right],\overline{B}=\left[\frac{1}{2},1\right]$,则有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=0$,但是 $P(\overline{A})=\frac{1}{2}\neq0,P(\overline{B})=\frac{1}{2}\neq0$. 从而不能选(D). 故(1)应选(C).

(2)若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B\neq S$,则 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}\neq\varnothing$;

若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$,则 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing$.

这表明(A)、(B)都不能人选．

由本章的问题与思考的第6题的命题1知,在 $P(A)\cdot P(B)>0$ 的条件下,若 $AB=\varnothing$,则 A 与 B 必不相互独立．从而不能选(C). 故(2)应选(D).

实际上,若 $AB=\varnothing$,即 $A\subset\overline{B}$. 于是 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)$.

(3)∵"$AB\supset A$"⇔"$B\supset A$".∴选项(C)、(D)是等价的．从而它们都不能人选．

虽然,若 $AB\supset A$ 或 $B\supset A$ 且 $P(A)>0$,则有 $P(B|A)=1$. 但是,反之不然．举例如下．

设一几何概型的样本空间 $S=[0,1]$,令 $A=[0,\frac{1}{2})$, $B=(0,\frac{3}{4}]$,则有 $AB=(0,\frac{1}{2})$, $P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{1}{2}$. 于是, $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=1$,但是 $AB\not\supset A$, $B\not\supset A$. 从而(C)、(D)不能入选．又 $P(B)=\frac{3}{4}$,于是 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}\neq 1$. 这表明(B)也不能人选．故(3)应选(A).

实际上, $P(A|\overline{B})=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)}{P(\overline{B})}\times[1-P(B|A)]=0$.

(4)由 A、B、C 相互独立,易证 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 与 C、AB 与 C(从而 $\overline{AB}$ 与 C)、$A-B=A\overline{B}$ 与 C(从而 $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$)相互独立．于是(A)、(C)、(D)都不能人选．故(4)应选(B).

实际上,用反证法可知(4)应选(B). 设 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立,则 AC 与 C 相互独立,即 $P(ACC)=P(AC)P(C)$,亦即 $P(AC)=P(AC)P(C)$. 由于 $0<P(A)<1$, $0<P(C)<1$,由 A 与 C 相互独立知, $P(AC)>0$. 于是 $P(C)=1$. 这与 $0<P(C)<1$ 矛盾．故 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 不相互独立．

29. 设 A、B、C 为三个事件,满足条件: $P(AB)=P(A)P(B)$, $C\supset AB$, $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$. 证明:

$$P(AC)\geqslant P(A)P(C).$$

证 由 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$ 知 $C\subset A\cup B$,又 $C\supset AB$,可得 A、B、C 三事件之间的关系如图1-2所示．

从而有 $AC=AB\cup C\overline{B}$,且 AB 与 $C\overline{B}$ 互不相容,于是

$$\begin{aligned}P(AC)&=P(AB)+P(C\overline{B})\geqslant P(A)P(B)+P(A)P(C\overline{B})\\&=P(A)[P(B)+P(C\overline{B})]\geqslant P(A)[P(CB)+P(C\overline{B})]\\&=P(A)P(C).\end{aligned}$$

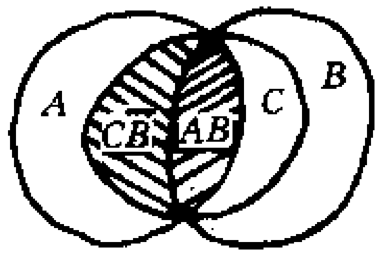


图 1-2

30. 设 A、B 为两个事件,证明:

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}.$$

证 用求极值的方法易证:对任意事件 B 都有, $0\leqslant P(B)P(\overline{B})\leqslant\frac{1}{4}$.

由 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,可知

$|P(AB)-P(A)P(B)|=|P(AB)-P(AB)P(B)-P(A\overline{B})P(B)|=|P(AB)P(\overline{B})-P(A\overline{B})P(B)|$ ……(∗)

又 $0\leqslant P(AB)P(\overline{B})\leqslant P(B)P(\overline{B})\leqslant\frac{1}{4}$,

$0\leqslant P(A\overline{B})P(B)\leqslant P(\overline{B})P(B)\leqslant\frac{1}{4}$,

这表明(∗)式是 $[0,\frac{1}{4}]$ 中的两个实数的差,当然不会大于 $[0,\frac{1}{4}]$ 这个区间的长度即 $\frac{1}{4}$ 了．于

是

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}.$$

五、习题与答案

习　题

1. 设 A、B、C 为三个事件，且满足

$$\overline{(\overline{C}\cup A)}\cup\overline{(C\cup\overline{A})}=B,$$

试用 A、B 及其运算来表示 C

2. 指出下列各式成立的条件．

(1) $(A\cup B)-A=B$；　(2) $A\cup B=\overline{A}$.

3. 设 A_1、A_2、…、A_n 为 n 个事件，试把

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n,$$

表示为 n 个互不相容的事件之和．

4. 对一批产品进行检验，从中随机地不放回地取 3 次，每次取 1 个产品．设 A_i 为第 i 次取到合格品（$i=1,2,3$）．试用 A_1、A_2、A_3 及其运算表示下列事件：

(1)3 次都取到了合格品；

(2)3 次中至少有 1 次取到了合格品；

(3)3 次中恰有 2 次取到了合格品；

(4)3 次中至多有 1 次取到了合格品

5. 从 0、1、2、…、9 这 10 个数字中，随机地取出 2 个数字，求其和大于 10 的概率．

6. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B、C 分别是将一枚均匀的骰子（色子）接连掷两次先后出现的点数．求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

7. 在 $a+b$ 个产品中有 a 个次品和 b 个正品，每次从中随机地不放回地抽取 1 个产品．试求下列事件的概率：

(1)前 k 次抽到的产品中恰有 1 个正品（$k\leqslant a+1$）；

(2)第 k 次抽取时首次抽到正品（$k\leqslant a+1$）；

(3)最后 1 次抽到的是正品；

(4)在将 $a+b$ 个产品都抽取出来的过程中，a 个次品被连续地抽出．

8. 将 n 本书随机地分给甲、乙二人，求甲、乙每人至少得到 1 本书的概率．

9. 将 C、C、E、E、I、N、S 这 7 个字母随机地排成一行，求恰好排成 $SCIENCE$ 的概率 p.

10. 将 3 个编号的球随机地放入 4 个编号的盒中，假设每个盒容纳球的个数不限，试求下列事件的概率：

(1)每盒最多有 1 个球；　(2)每盒最多有 2 个球．

11. 6 个小孩将他们的左手两两拉在一起，然后再将右手两两拉在一起，求他们恰好拉成一个圈的概率．

12. 设有 mn 个球，其中 1 个是黑球，1 个是白球，其余全是红球．把这 mn 个球随机地放

入 m 个袋中,每袋放 n 个球.求黑球与白球恰好在同一袋中的概率.

13. 一小城镇有机动车2万辆,牌照号码从00001至20000.在此城镇随机地遇到一机动车,求该车牌照号码有数字8的概率.

14. 一小区居民订阅报纸的统计数据如下:订甲种报的占40%,订乙种报的占25%,同时订上述两种报的占15%.求下列事件的概率:

(1)只订甲报的;　(2)只订一种报的;　(3)至少订一种报的;　(4)两种报都不订的.

15. 在一均匀对称的四面体的四个面上,分别涂上红、黄、蓝、白四种颜色.现将四面体抛掷3次,试求"在3次抛掷中都是红色面或黄色面不着地"这一事件的概率.

16. 袋中有编号为1、2、……、$n(n\geqslant 2)$的 n 个球,今从袋中随机地有放回地抽 r 次,每次抽1个球.求下列事件的概率:

(1)1号球不被抽到;　(2)1号球和2号球都被抽到.

17. 从一付朴克牌(四种花色,每种花色13张)中,随机地有放回地取6张.求在这6张牌中,四种花色每种至少有1张的概率.

18. 甲、乙两人进行乒乓球单打比赛.甲发球成功后,乙回球失误的概率为0.3.若乙回球成功,甲回球失误的概率为0.4,若甲回球成功,乙再次回球失误的概率为0.5.试求,在这几个回合中乙输掉1分的概率.

19. 甲、乙二人轮流对同一目标进行射击,甲命中的概率为 $p_1(0<p_1<1)$,乙命中的概率为 $p_2(0<p_2<1)$.规定谁先命中目标谁获胜,令甲先射击.求甲、乙二人获胜的概率各是多少.

20. 某电子元件有3箱,每箱都装50个元件,三箱中的一等品分别为45个、40个和35个.今随机地任选一箱,再从这一箱中随机地不放回地先后取出2个元件.

(1)求先取出的元件是一等品的概率;

(2)求所取出的2个元件都是一等品的概率;

(3)在已知后取出的元件是非一等品的条件下,求先取出的元件是一等品的(条件)概率.

21. 已知36个乒乓球中有4个已经用过,把它们随机地分成了3盒,每盒12个.今从这3盒中随机地任取1盒,求这一盒乒乓球都是没有用过的概率.

22. 某店有4位售货员,假设每位售货员是否用秤是相互独立的,且每位售货员平均在1小时内只有15分钟用秤.如果要求当售货员用秤时,因秤不够而影响售货的概率小于10%,那么该店应配置几台秤.

23. 袋中有 n 个白球、m 个黑球和 l 个红球,今每次从袋中随机地不放回取出1球,这样取下去.求白球取出在黑球之前的概率.

24. 袋中装有2只白球和1只黑球,每次从袋中随机地摸出1球不放回,再放入一黑球,这样继续下去.试求第 k 次摸出黑球的概率.

答案与提示

1. $C=\overline{B}$

2. (1)$AB=\varnothing$,(2)$A=\varnothing,B=S$

3. $A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\cdots\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n$

4. (1)$A_1A_2A_3$;(2)$A_1\cup A_2\cup A_3$;(3)$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;

(4)$\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3$

5. $\frac{16}{45}$

6. $p=\frac{19}{36}, q=\frac{1}{18}$

7. (1)$\frac{C_a^{k-1}C_b^1}{C_{a+b}^k}$;(2)$\frac{A_a^{k-1}A_b^1}{A_{a+b}^k}$;(3)$\frac{b}{a+b}$;(4)$\frac{(b+1)!\ a!}{(a+b)!}$

8. $1-\frac{1}{2^{n-1}}$

9. $\frac{1}{1260}$

10. (1)$\frac{3}{8}$;(2)$\frac{15}{16}$

11. $\frac{8}{15}$

12. $\frac{n-1}{mn-1}$,提示:只考虑黑白球的位置

13. 0.3439

14. (1)0.25;(2)0.35;(3)0.50;(4)0.50

15. $\frac{23}{32}$

16. (1)$\left(1-\frac{1}{n}\right)^r$;(2)$1-2\left(1-\frac{1}{n}\right)^r+\left(1-\frac{2}{n}\right)^r$

17. $1-4\left(\frac{3}{4}\right)^6+6\left(\frac{1}{2}\right)^6-4\left(\frac{1}{4}\right)^6\approx 0.318$

18. 0.51

19. $P\{甲获胜\}=\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$;$P\{乙获胜\}=\frac{p_2-p_1p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$

20. (1)0.80;(2)0.6435;(3)0.1565

21. 0.1804,提示:用全概率公式

22. 2 台

23. $\frac{n}{m+n}$

24. $p_k=1-\left(\frac{2}{3}\right)^k, k=1,2,\cdots$;提示:参考本章典型例题 27

第二章　随机变量及其分布

一、基本要求

①理解随机变量的概念、随机变量的分布函数的概念与性质．

②掌握离散型随机变量和连续型随机变量的描述方法，理解分布列和概率密度的概念与性质，会利用随机变量的概率分布计算有关事件的概率．

③熟练掌握二项分布、泊松(Poisson)分布、均匀分布、指数分布与正态分布．

④会求随机变量的简单的函数的概率分布．

二、内容提要

1. 随机变量的概念：

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{\omega\}$，$X=X(\omega)$是以样本点为自变量的单值实函数，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$为一个事件，即概率 $P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$存在，则称 $X(\omega)$为随机变量，简记为 X.

随机变量一般用 X,Y,Z 或 ξ,η 等表示．

描述随机变量有两个方面：一是随机变量可能取哪些值，二是以多大的概率取这些可能值．这两方面合起来称为随机变量的概率分布．

2. 随机变量的分布函数及其性质

设有随机变量 $X(\omega)$，对任意实数 x，定义

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}. \tag{2.1}$$

称 $F(x)$为随机变量 X 的分布函数．分布函数有下述基本性质：

①$F(x)$为 x 的单调不减函数，即对 $\forall x_1<x_2$，有

$$F(x_1)\leqslant F(x_2). \tag{2.2}$$

②$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，

$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1,\ \forall x\in\mathbf{R}. \tag{2.3}$$

③$F(x)$是 x 的右连续函数，即

$$F(x+0)=F(x), \tag{2.4}$$

④当 $x_1<x_2$ 时，

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1). \tag{2.5}$$

可证，$\forall x_0\in\boldsymbol{R}$，有

$$P(X=x_0)=F(x_0)-F(x_0-0). \tag{2.6}$$

上述性质中①～③为 $F(x)$的特征性质，即若 $F(x)$为分布函数，则必有性质①～③，反之若函数 $F(x)$具有性质①～③，则 $F(x)$必为某随机变量的分布函数．

3．离散型随机变量及常见分布

①若随机变量 X 可能取的值是有限多个或可列无穷多个，则称 X 为离散型随机变量．

②离散型随机变量的概率分布可用表格形式表示如下：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	

其中 $p_i=P(X=x_i)$． (2.7)

此表格称为离散型随机变量 X 的分布列．分布列中的 p_i 有下述性质：

1° $p_i\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots$

2° $\sum\limits_i p_i=1.$ (2.8)

离散型随机变量的概率分布还可用公式表示如下：

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i=1,2,\cdots$$

称此为 X 的分布律．

③设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=x_i)=p_i \quad i=1,2,\cdots$ 则 X 的分布函数

$$F(x)=\sum_{x_i\leqslant x}p_i. \tag{2.9}$$

易见，$F(x)$为阶梯形函数，其跳跃点为 $x_i,i=1,2,\cdots$，跃度为对应的概率 $p_i,i=1,2,\cdots$

④常见的离散型随机变量：

1° 0－1 分布(两点分布)

若 X 的分布列如下：

X	0	1
P	q	p

其中 $0<p<1$，$q=1-p$．

X 的分布律也可表为：

$$P(X=k)=p^kq^{1-k},k=0,1 \tag{2.10}$$

则称 X 服从参数为 p 的 0－1 分布(两点分布)

2° 二项分布

设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p．其中 $0<p<1$．n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数记为 X，则 X 的分布律为：

$$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\cdots,n \tag{2.11}$$

称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记为 $X\sim B(n,p)$．

显然

$$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\geqslant 0 \quad 且 \sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=1.$$

3° 泊松(Poisson)分布

设随机变量 X 的可能取值为非负整数,且其分布律为:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2.12}$$

其中 λ 为正的常数,则称 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布,记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

显然 $$P(X=k)\geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1.$$

泊松(Poisson)逼近定律:

在二项分布 $B(n,p_n)$中,若 n 变大时,p_n 就变小,并保持 $np_n=\lambda$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$,则

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{2.13}$$

推论:在二项分布 $B(n,p)$中,若 n 很大,p 很小,则

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots,n$$

4° 超几何分布

设有 N 件产品,其中有 M 件次品,从中任取 $n(n\leqslant N-M)$件,以 X 表示这 n 件产品中的次品数,则 X 的分布律为:

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{2.14}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,l,\quad l=\min\{M,n\}$,则称 X 服从超几何分布 .

利用二项系数的性质,不难验证:

$$P(X=k)\geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{l}P(X=k)=1$$

5° 几何分布

设每次试验 A 出现的概率为 p(其中 $0<p<1$),A 不出现的概率记为 q,现作独立重复试验,直到 A 出现为止,则所作试验次数 X 具有分布律:

$$P(X=k)=q^{k-1}p\qquad k=1,2,\cdots \tag{2.15}$$

则称 X 服从参数为 p 的几何分布 .

4. 连续型随机变量及其常见分布

①设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,若存在可积函数 $f(x)\geqslant 0$,使得对任意实数 x 都有:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \tag{2.16}$$

则称 X 为连续型随机变量,而称 $f(x)$为 X 的概率(分布)密度函数 .

②概率密度函数 $f(x)$有下述基本性质:

1° $f(x)\geqslant 0$ (2.17)

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$ (2.18)

这两条是密度函数的特征性质 .

3° 若 $x_1<x_2$,则

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x=F(x_2)-F(x_1). \tag{2.19}$$

由于连续型随机变量的分布函数在任何一点 x 处都连续，于是若 X 为连续型随机变量，则

$$P(X=x)=0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

所以性质 3°也可写成：

$$P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

由性质 3°可进一步得到，对 x 轴上具有某种性质的区域 D^*，若 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$$P(X\in D)=\int_D f(x)\mathrm{d}x.$$

如：$P(X^2>X)=\int\limits_{x^2>x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$. (2.20)

5° 若随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 满足：

$F(x)$ 连续；

存在 $x_1<x_2<\cdots<x_n(n\geqslant1)$，在区间 $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,+\infty)$ 上 $F'(x)$ 存在且连续．

令 $f(x)=\begin{cases}F'(x) & \text{当 } F'(x) \text{存在时},\\ 0 & \text{当 } F'(x) \text{不存在时}\end{cases}$

则 $f(x)$ 必为 X 的概率密度函数．

若一个连续型随机变量 X 其概率密度函数形式如下：

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x)>0, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

这时我们称 X 取值于 $[a,b]$，反之亦然．此时对应的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \int_a^x f_1(x)\mathrm{d}x, & a\leqslant x<b;\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases} \tag{2.21}$$

(3) 常见的连续型随机变量

1° 若 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{2.22}$$

则称 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，记为 $X\sim U[a,b]$.

对应的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b;\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

* D 为直线上的 Borel 集

均匀分布的含义:对于任意区间$(c,d)\subset[a,b]$,X 落入(c,d)的概率只与此区间的长度有关,而与其位置无关.

2° 指数分布:

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\qquad (\lambda>0) \tag{2.23}$$

则称 X 服从参数为λ 的指数分布,其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

3° 正态分布:

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.\qquad -\infty<x<+\infty \tag{2.24}$$

其中 σ,μ 为常数,且 $\sigma>0$,则称 X 服从参数为μ,σ 的正态分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别地,当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,称 $N(0,1)$为标准正态分布,其分布函数用

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x. \tag{2.25}$$

表示.

$\Phi(x)$有下述性质:$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$. (2.26)

即 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$,从而 $\Phi(0)=0.5$,

一般若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则有

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),$$

于是若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$P\{x_1<X<x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).\ \forall\, x_1<x_2 \tag{2.27}$$

$$P\{X>x_1\}=1-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

$$P\{X<x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right).$$

5. 随机变量函数的概率分布

①X 为离散型随机变量,其分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

设 $Y=\varphi(X)$,则 Y 的分布列为

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\cdots$	$\varphi(x_i)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

若$\{\varphi(x_i)\}$中有相等的只须列出一个,而把对应的 p_i 相加作为列出的这一个 $\varphi(x_i)$所对应的概率值.

②设 X 为连续型随机变量,其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}f_1(x)>0, & a<x<b;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

1° 设 $y=\varphi(x)$是 x 的单调可导函数(即 $\varphi'(x)>0$ 或 $\varphi'(x)<0$,可能有个别点上的 $\varphi'(x)=0$)则 $Y=\varphi(X)$也是连续型随机变量,且其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\psi(y))|\psi'(y)|, & \alpha<y<\beta;\\ 0, & 其它.\end{cases} \tag{2.28}$$

其中 $\psi(y)$是 $y=\varphi(x)$的反函数,(α,β)是 $\varphi(x)$的值域,即 $\psi(y)$的定义域.

一般情况下,满足上述条件可直接用公式,或用分布函数的方法来推导 Y 的密度函数.

Y 的分布函数为:

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\varphi(X)\leqslant y),$$

分两种情况,当 $\varphi(x)$单调不减且反函数 $\psi(y)$存在时,

$$F_Y(y)=P(X\leqslant\psi(y))=\begin{cases}0, & y\leqslant\alpha;\\ F_X(\psi(y)), & \alpha<y<\beta;\\ 1, & y\geqslant\beta.\end{cases}$$

当 $\varphi(x)$单调不增且反函数 $\varphi(y)$存在时,

$$F_Y(y)=P(X\geqslant\psi(y))=\begin{cases}0, & y\leqslant\alpha;\\ 1-P(X\leqslant\psi(y)), & \alpha<y<\beta;\\ 1, & y\geqslant\beta.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\leqslant\alpha;\\ 1-F_X(\psi(y)), & \alpha<y<\beta;\\ 1, & y\geqslant\beta.\end{cases}$$

两边对 y 求导即可得 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

2° 当 $y=\varphi(x)$不是单调函数时,用上述分布函数法先求分布函数再求密度函数.

3° 当 $Y=\varphi(X)$不是连续型随机变量,如

$$Y=\begin{cases}1, & X\geqslant 0;\\ -1, & X<0\end{cases}$$

此时 Y 为离散型,求分布列就简单了.

$$P(Y=1)=P(X\geqslant 0)=\cdots$$
$$P(Y=-1)=P(X<0)=\cdots$$

③随机变量函数的分布有一重要结果:正态随机变量的线性函数仍为正态随机变量.即若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,(|a|\sigma)^2)$,$a,b$ 为常数,且 $a\neq 0$.

三、问题与思考

1. 以样本点为自变量的任意单值实函数都是随机变量吗?

答 否.定义中要求对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$为事件,即 $P\{X(\omega)\leqslant x\}$存在.由于一般情况下这些单值实函数均能满足上述条件,故不再引入数学上更深的概念.

2. 非离散型随机变量就一定是连续型随机变量吗?

答 否．连续型随机变量是非离散型随机变量中最常见的一种．我们可以举出既非离散型又非连续型的随机变量．

设随机变量 $X \sim U[0,2]$，令

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

则随机变量 $Y=g(X)$既非连续型又非离散型．

事实上，由 $Y=g(X)$的定义可知 Y 只在$[0,1]$上取值，于是当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；$y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$．

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$F_Y(y)=P(g(X)\leqslant y)=P(X\leqslant y)=\frac{y}{2}$，

于是

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac{y}{2}, & 0\leqslant y<1;\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

首先 Y 取单点$\{1\}$的概率 $P(Y=1)=F_Y(1)-F_Y(1-0)=\frac{1}{2}\neq 0$．故 Y 不是连续型随机变量．其次其分布函数不是阶梯形函数，故 Y 也不是离散型随机变量．

3. 设 X 为连续型随机变量，而 $g(x)$为连续函数，$Y=g(X)$还是连续型随机变量吗？

答 未必是连续型随机变量．反例可参考前面问题与思考中的 2．

4. 不同的随机变量其分布函数可能相同吗？

答 完全可能．我们已经知道分布函数很好地刻划了随机变量取值的概率，从而对随机变量的研究可转化为对其分布函数的研究．但是不同的随机变量也可能有相同的分布函数．

设一几何概型的样本空间为 $S=[0,1]$，随机变量定义如下：

$$X_1(\omega)=-X_2(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\omega<\frac{1}{2};\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant\omega<1.\end{cases}$$

则 $X_1(\omega)\neq X_2(\omega)$，但其分布函数相同，均为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{1}{2}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

由此可知即使是同分布的随机变量也不能视为同一个随机变量．

5. 连续型随机变量的密度函数连续吗？

答 否．虽然正态分布的密度函数连续，但均匀分布、指数分布的密度函数都不连续．

四、典型例题

1. 甲、乙二人轮流射击，直到靶子被击中为止，二人的命中率分别为 p_1,p_2，今甲先射

击．求二人射击次数的分布律．

分析 设靶子被击中时，甲、乙二人射击的次数分别为 X,Y. 此题的关键是，搞清楚事件 $\{X=k\}$，$\{Y=k\}(k\geqslant 1)$的含义．它们都可以表示为两个较复杂一些的互不相容的事件的并．再有，0 是 Y 的一个可能值．

解 设靶子被击中时，甲、乙二人射击的次数分别为 X,Y. 则由题意知：

$P(X=k)=P$(前 $k-1$ 次甲、乙均未击中，第 k 次甲击中或第 k 次甲不中而乙击中)

$=P$(前 $k-1$ 次甲、乙均未击中，第 k 次甲击中)

$+P$(前 $k-1$ 次甲、乙均未中，第 k 次甲不中而乙击中)

$$=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}p_1+(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$$

$$=(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2).\ (k\geqslant 1)$$

$P(Y=k)=P$(前 k 次甲、乙均未击中第 $k+1$ 次甲击中或前 $k-1$ 次甲、乙均未击中第 k 次甲不中而乙击中)

$=P$(前 k 次甲、乙均未击中第 $k+1$ 次甲击中)

$+P$(前 $k-1$ 次甲、乙均未击中第 k 次甲不中而乙击中)

$$=(1-p_1)^k(1-p_2)^kp_1+(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$$

$$=(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}(p_1+p_2-p_1p_2).\ (k\geqslant 1)$$

$P(Y=0)=P$(甲第一次就击中)$=p_1$.

注：易产生的问题是，由于少考虑了一种情况，导致 X,Y 服从几何分布的错误．

2. 在事件 A 发生的概率为 p 的 Bernoulli 试验中，若以 ξ 记第 r 次 A 发生时的试验次数，求 ξ 的分布．

解 $P(\xi=k)=P\{$前 $k-1$ 次试验中 A 恰好出现了 $r-1$ 次而第 k 次试验 A 发生$\}$

$$=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}\cdot p$$

$$=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.\quad (k=r,r+1,\cdots)$$

上面第二个等号成立是由于试验的独立性而得的．

此分布称为 Pascal 分布．

小结 通过上面两个例题可见，求离散型随机变量的分布律时，首先应该搞清随机变量取可能值时所表示的随机事件，然后确定其分布列．为验证所求分布是否正确，通常可计算一下所求得的"分布列"之和是否为 1，若不为 1，则结果一定是错误的．

3. 设某人有两盒火柴，每盒有 N 根火柴，每次使用时任取一盒从中取 1 根，求 $A=\{$发现某盒已空，而另一盒还剩 r 根$\}$的概率．

解 设 $B=\{$取到某盒$\}$，则每次试验有两种可能结果 B 与 $\overline{B}$，且

$$P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}.$$

$P(A)=P($第 $N+1$ 次的 B 发生出现在第 $2N-r+1$ 次试验$\}$

$$=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-r}$$

$$=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}.$$

此题直接用了上面例 2 的结论．

4. 设某质点只能位于 x 轴上的整数点，在 $t=0$ 时刻，它位于原点，此后每隔单位时间，

由于受到一个外力的随机作用，它分别以概率 p 及 $q=1-p$ 向右或向左移动一个单位，求 $t=n$ 时，该质点位于 k 位置的概率．

解 令 S_n 为质点在 $t=n$ 时刻的位置，于是欲使 $S_n=k$，必须且只须在前 n 次游动中向右移动的次数比向左移动的次数多 k 次（这里 k 也可以是负的整数），以 x 记质点在前 n 次游动中向右移动的次数，以 y 记向左移动的次数，由以上分析知：

$$\begin{cases} x+y=n; \\ x-y=k. \end{cases}$$

即 $x=\dfrac{n+k}{2}$，因 x 为整数，因此 k 必须与 n 具有相同的奇偶性．

事件 $\{S_n=k\}$ 发生相当于要求在前 n 次游动中有 $\dfrac{n+k}{2}$ 次向右，$\dfrac{n-k}{2}$ 次向左，利用二项分布即得：

$$P(S_n=k)=\begin{cases} C_n^{\frac{n+k}{2}}\cdot p^{\frac{n+k}{2}}\cdot q^{\frac{n-k}{2}}, & n\geqslant |k| \text{ 且 } n \text{ 与 } k \text{ 的奇偶性相同；} \\ 0, & \text{否则．} \end{cases}$$

5. 下列函数是否为分布函数，若是，判断它是哪类随机变量的分布函数．

(1) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ \dfrac{1}{2}, & -2\leqslant x<0; \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin x, & 0\leqslant x<\pi; \\ 1, & x\geqslant \pi. \end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x\geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

(4) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x+\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}; \\ 1, & x\geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

解 (1)易见 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为单调不减的右连续函数，且有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，故 $F(x)$ 为某一随机变量的分布函数，又 $F(x)$ 为阶梯形函数，从而 $F(x)$ 是离散型随机变量的分布函数．

(2) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调不减函数，故 $F(x)$ 不是分布函数．

(3) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续单调不减，且有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$．从而 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数，又设非负函数．

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } x\geqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

则有
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0;\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2};\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

即 $F(x)$ 为连续型随机变量的分布函数．

(4) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上右连续，单调不减，且 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$，故 $F(x)$ 为分布函数．又 $F(x)$ 不是阶梯形函数，故 $F(x)$ 不是离散型随机变量的分布函数．

注意到 $P(X=0)=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{2}\neq 0$. 所以 $F(x)$ 也不是连续型随机变量的分布函数．

注：判断一个函数是否为分布函数，只能用分布函数的三条特征性质，若满足三条特征性质，则此函数是分布函数，否则就不是分布函数．

6. 设随机变量 X 的分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

求(1) A 的值．

(2) X 落在 $(-1,\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{3},2)$ 内的概率．

(3) X 的概率密度函数．

解 (1)由分布函数的右连续性，在 $x=1$ 点处有 $F(1)=A=F(1+0)=1$. 即 $A=1$.

(2)由分布函数的性质知(此处 $F(x)$ 连续)：

$$P(X\in(-1,\frac{1}{2}))=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-1)=\frac{1}{4};$$

$$P(X\in(\frac{1}{3},2))=F(2)-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}.$$

(3)由于 $F(x)$ 最多除 $x=1$ 和 0 点外处处可导，且在 $x=0,1$ 处连续，若取
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } x>1;\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 $f(x)\geqslant 0$，且对一切 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，从而 $f(x)$ 为随机变量 X 的密度函数．

注：在分布函数中若有待定未知常数一般用分布函数的基本性质来确定，但在本题中若取形式
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

则 A 取不大于 1 的任何非负实数时，$F(x)$ 都是分布函数，但当 A 取小于 1 的任何非负实数时，X 不是连续型随机变量，从而不存在密度函数．

7. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

求(1)常数 a.

(2) $P(X\leqslant 0)$, $P\left(\frac{\pi}{4}\leqslant X<100\right)$.

(3) X 的分布函数 .

解 (1)由密度函数的性质,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\mathrm{d}x=2a,$$

故 $a=\frac{1}{2}$.

(2)根据密度函数的性质,有

$$P(X\leqslant 0)=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$P\left(X\in\left[\frac{\pi}{4},100\right)\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{100}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{100}0\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(3)由分布函数的定义,有

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$\therefore$ 当 $x<-\frac{\pi}{2}$时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0.$$

当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sin x+1).$$

当 $x>\frac{\pi}{2}$时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}0\mathrm{d}x=1.$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

注:密度函数为分段函数的随机变量,求其分布函数时,由于积分限是从 $-\infty$ 到 x,故其分布函数表达式也往往是分段函数 .

8. 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(2<X<4)=0.3$,求 $P(X<0)$.

解

因为　$0.3=P(2<X<4)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)$,

所以　$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.3+0.5=0.8$,

于是　$P(X<0)=P\left(\frac{X-2}{\sigma}<\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

9.　一批鸡蛋,优良品种占$\frac{2}{3}$,一般品种占$\frac{1}{3}$,优良品种蛋重(单位:克)$X_1\sim N(55,5^2)$,一般品种蛋重 $X_2\sim N(45,5^2)$.

(1)从中任取一个,求其重量大于50g的概率.

(2)从中任取两个,求它们的重量都小于50g的概率.

解　(1)设 A:任取一蛋其重量大于50g.

B_1:任取一蛋为优良品种;

B_2:任取一蛋为一般品种.

则 B_1,B_2 互斥,且 $B_1\cup B_2=S$.

$P(B_1)=\frac{2}{3},P(B_1)=\frac{1}{3}$;

$P(A\mid B_1)=P(X_1>50)=1-\Phi\left(\frac{50-55}{5}\right)=0.8413$;

$P(A\mid B_2)=P(X_2>50)=1-\Phi\left(\frac{50-45}{5}\right)=0.1587$.

由全概率公式得:

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)$$
$$=\frac{2}{3}\times0.8413+\frac{1}{3}\times0.1587=0.6138.$$

(2)从中任取2个,每个蛋重大于50g的概率 $p=0.6138$,小于50g的概率 $q=1-p=1-0.6138$

设任取2个,有 Y 个大于50g,则 $Y\sim B(2,p)$.

于是所求概率为:

$P(Y=0)=C_2^0\cdot p^0q^2=(1-0.6138)^2=0.1492$.

10.　[均匀分布的重要地位].

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,因 $F(x)$为单调不减函数,对任意的 $y,0\leqslant y\leqslant1$,定义

$$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)>y\},$$

作为 $F(x)$的反函数

令 $Y=F(X)$,则对任意 $x\in[0,1]$,

$P(Y\leqslant X)=P(F(X)\leqslant x)=P(X\leqslant F^{-1}(x))=F(F^{-1}(x))=x$.

即 $Y=F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

反之,若 $X\sim U[0,1]$,对任意的分布函数 $F(x)$,令

$$Y=F^{-1}(X),$$

$F^{-1}(y)$的定义同上.

则 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(F^{-1}(X)\leqslant y)$$
$$=P(X\leqslant F(y))=F(y).$$

即 Y 的分布函数为 $F(x)$.

注 从此题可以得到：任意分布的随机变量都能产生出[0,1]上的均匀分布，反之，只要我们有了[0,1]上的均匀分布的随机变量，就可以通过以上方法产生分布函数为 $F(x)$ 的随机变量，这个结论在蒙特卡洛(Monte Carlo)方法中具有特别重要的意义．

11. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，求下列随机变量的分布函数：

(1) $Y=aX+b$； a,b 为常数，且 $a\neq0$

(2) $Y=e^X$；

(3) $Y=\frac{1}{X}$； (加条件 $P(X=0)=0$)

(4) $Y=\sqrt{|X|}$.

解 (1)设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(aX+b\leqslant y).$$

当 $a>0$ 时，上式 $=P\left(X\leqslant\frac{y-b}{a}\right)=F\left(\frac{y-b}{a}\right)$；

当 $a<0$ 时，上式 $=P\left(X\geqslant\frac{y-b}{a}\right)$

$$=1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)+P\left(X=\frac{y-b}{a}\right)$$
$$=1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)+F\left(\frac{y-b}{a}\right)-F\left(\frac{y-b}{a}-0\right)$$
$$=1-F\left(\frac{y-b}{a}-0\right).$$

于是

$$F_Y(y)=\begin{cases}F\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0;\\ 1-F\left(\frac{y-b}{a}-0\right), & a<0.\end{cases}$$

(2) $P(Y\leqslant x)=P(e^X\leqslant x)$.

当 $x\leqslant0$ 时，$P(Y\leqslant x)=0$；

当 $x>0$ 时，$P(Y\leqslant x)=P(X\leqslant\ln x)=F(\ln x)$.

$\therefore Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}F(\ln y), & y>0;\\ 0, & y\leqslant0.\end{cases}$$

(3) $P(Y\leqslant x)=P\left(\frac{1}{X}\leqslant x\right)$

$$=\begin{cases}P\left(\frac{1}{X}\leqslant x\right), & x<0;\\ P\left(\frac{1}{X}\leqslant0\right)=P(X\leqslant0)=F(0), & x=0;\\ P\left(\frac{1}{X}\leqslant x\right), & x>0.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,

$$P\left(\frac{1}{X}\leqslant x\right)=P\left(X<0\text{ 且 }X\geqslant\frac{1}{x}\right)$$
$$=P\left(\frac{1}{x}\leqslant X<0\right)$$
$$=P\left(X=\frac{1}{x}\right)+P\left(\frac{1}{x}<X\leqslant 0\right)-P(X=0)$$
$$=F\left(\frac{1}{x}\right)-F\left(\frac{1}{x}-0\right)+F(0)-F\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=F(0)-F\left(\frac{1}{x}-0\right).$$

当 $x>0$ 时,

$$P\left(\frac{1}{X}\leqslant x\right)=P\left(X<0\text{ 或 }X\geqslant\frac{1}{x}\right)$$
$$=P(X<0)+P\left(X\geqslant\frac{1}{x}\right)$$
$$=P(X\leqslant 0)+1-P\left(X\leqslant\frac{1}{x}\right)+P\left(X=\frac{1}{x}\right)$$
$$=F(0)+1-F\left(\frac{1}{x}\right)+F\left(\frac{1}{x}\right)-F\left(\frac{1}{x}-0\right)$$
$$=F(0)+1-F\left(\frac{1}{x}-0\right).$$

故 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y)=\begin{cases}F(0)-F\left(\frac{1}{y}-0\right), & y<0;\\ F(0), & y=0;\\ F(0)+1-F\left(\frac{1}{y}-0\right), & y>0.\end{cases}$$

(4) $P(Y\leqslant x)=P(\sqrt{|X|}\leqslant x)$.

当 $x<0$ 时, $P(\sqrt{|X|}\leqslant x)=0$;

当 $x\geqslant 0$ 时,

$$P(\sqrt{|X|}\leqslant x)=P(|X|\leqslant x^2)$$
$$=P(-x^2\leqslant X\leqslant x^2)$$
$$=F(x^2)-F(-x^2)+P(X=-x^2)$$
$$=F(x^2)-F(-x^2-0).$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ F(y^2)-F(-y^2-0), & y\geqslant 0.\end{cases}$$

12. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 $Y=\max(X,\mu)$的分布函数.

解 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,即

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\max(X,\mu)\leqslant y)$$

由 Y 的表达式知 $Y\geqslant\mu$. 故

当 $Y<\mu$ 时, $\{Y\leqslant y\}=\varnothing$

当 $y\geqslant\mu$ 时，$\{Y\leqslant y\}=\{\max(X,\mu)\leqslant y\}=\{X\leqslant y\}$.

于是

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\mu;\\ P(X\leqslant y), & y\geqslant\mu.\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & y<\mu;\\ \Phi\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma},\right) & y\geqslant\mu.\end{cases}$$

注 这里的 $Y=\max(X,\mu)$既不是连续型随机变量，又不是离散型随机变量，是混合型的随机变量．

13. 在半径为 R，圆心在原点的圆周上有一动点 $M(X,Y)$，此点与 x 轴正向夹角为 $\theta(-\pi\leqslant\theta<\pi)$， 设 θ 在$[-\pi,\pi)$上服从均匀分布．求

(1)该点横坐标 X 的密度函数．

(2)该点到$(-R,0)$的距离 Z 的密度函数．

解 由题意，知 θ 的密度函数为

$$f_\theta(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant v<\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又 $X=R\cos\theta$ 在$[-\pi,\pi)$上不是单调函数．

当 $x\leqslant -R$ 时，$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(R\cos\theta\leqslant x)=0$;

当 $x>R$ 时，$F_X(x)=1$;

当 $-R<x\leqslant R$ 时，由于

$$\left\{\cos\theta\leqslant\frac{x}{R},\theta\in[-\pi,\pi)\right\}=\left\{|\theta|\geqslant\arccos\left(\frac{x}{R}\right),\theta\in[-\pi,\pi)\right\},$$

故

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P\left(\cos\theta\leqslant\frac{x}{R},\theta\in[-\pi,\pi)\right)\\&=P\left(|\theta|\geqslant\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right)\\&=1-P\left(|\theta|<\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right)\\&=1-\frac{\arccos\left(\frac{x}{R}\right)}{\pi}.\end{aligned}$$

又由于 $F_X(x)$处处连续，且当 $x\neq\pm R$ 时可导，故

$$f_X(x)=F'_X(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqslant R;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & |x|<R.\end{cases}$$

(2)点 $M(X,Y)$到点$(-R,0)$的距离 Z 可表示为随机变量 θ 的函数．即 $Z=2R\cos\dfrac{\theta}{2}$，而 θ 的分布已知．$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$. 且

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=0$,

当 $z\geqslant 2R$ 时，$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2}\leqslant z\right)=1$.

当$0\leqslant z<2R$ 时，类似于(1)有

$$F_Z(z)=P\left(\cos\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{z}{2R}\right)$$
$$=P\left(\left|\frac{\theta}{2}\right|\geqslant\arccos\frac{z}{2R}\right)$$
$$=1-\frac{2\arccos\frac{z}{2R}}{\pi}.$$

$$\therefore f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0 \text{ 或 } z\geqslant 2R;\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{4R^2-z^2}}, & 0<z<2R.\end{cases}$$

14. 已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{-2(x-B)}, & x\geqslant B;\\ 0, & x<B.\end{cases}$$

其中 A,B 为常数，且 $A>0$. 又知

$P(X\in(0,\ln2))=\frac{1}{2}$. 求 A,B 的值 .

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 知：

$$\int_B^{+\infty}Ae^{-2(x-B)}\mathrm{d}x=1,$$

令 $t=x-B$，则 $\int_0^{+\infty}Ae^{-2t}\mathrm{d}t=1$，故 $A=2$.

当 $B>0$ 时，应有 $B<\ln2$，

否则，若 $B>\ln2$，则 $P(X\in(0,\ln2))=0\neq\frac{1}{2}$.

与题不符 . 故 $\ln2>B>0$.

此时 $P(X\in(0,\ln2))=\int_0^B 0\mathrm{d}x+\int_B^{\ln2}2e^{-2(x-B)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，

由此解得 $B=\frac{1}{2}\ln2$.

当 $B<0$ 时，

$P(X\in(0,\ln2))=\int_0^{\ln2}2e^{-2(x-B)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，即解得 $B=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$.

于是 A,B 有两组解：

$$\begin{cases}A=2;\\ B=\frac{1}{2}\ln2.\end{cases}\qquad\begin{cases}A=2;\\ B=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.\end{cases}$$

15. 设随机变量 X 的绝对值不大于1；又 $P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$. 在$\{-1<X<1\}$发生的条件下，X 在$(-1,1)$内任一子区间上取值的条件概率与该区间长度成正比，试求：

(1) X 的分布函数 $F(x)$.

(2) X 取负值的概率 $P\{X<0\}$.

解 (1)依题意知 $|X|\leqslant1$. 故

$$1=P\{|X|\leqslant1\}=P\{X=1\}+P\{-1<X<1\}+P\{X=-1\}$$

$$=\frac{1}{4}+P\{-1<X<1\}+\frac{1}{8}.$$

于是 $P\{-1<X<+1\}=\frac{5}{8}>0.$

又$(-1,1)$为$(-1,1)$的一个子区间,由题意:

$$\begin{aligned}1&=P\{-1<X<1\mid -1<X<1\}\\&=k[(+1)-(-1)]=2k.\end{aligned}$$

于是 $k=\frac{1}{2}.$

由$|X|\leqslant 1$知:当 $x<-1$ 时,$F(x)=0$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F(x)=1.$

又 $F(-1)=P\{X\leqslant -1\}=P\{X=-1\}+P\{X<-1\}=\frac{1}{8}.$

下面求当$-1<x<1$时,$F(x)$的表达式.

由题意知:

$$P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=k(x-(-1))=\frac{1}{2}(x+1),$$

于是

$$\begin{aligned}P\{-1<X\leqslant x\}&=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{(x+1)}{2}=\frac{5(x+1)}{16}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}\\&=\frac{1}{8}+\frac{5(x+1)}{16}=\frac{5x+7}{16}.\end{aligned}$$

上式当 $x=-1$ 时,也成立.综上所述得:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2)由 $F(x)$的表达式知 $x=0$ 是 $F(x)$的连续点,由本章(2.6)式知 $P(X=0)=0$,于是

$$P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}=F(0)=\frac{7}{16}.$$

16. 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=|X-1|$的概率密度.

解 由 X 的密度函数可知:X 只在$[0,2]$上取值,故 $Y=|X-1|$只能在$[0,1]$上取值.于是

当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$;

当 $y>1$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=1.$

下面求当$0\leqslant y\leqslant 1$时 Y 的分布函数.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(|X-1| \leqslant y) \\
&= P\{-y+1 \leqslant X \leqslant y+1\}
\end{aligned}
$$

当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时，$1 \geqslant -y+1 \geqslant 0, 1 \leqslant y+1 \leqslant 2$.

又 X 是连续型随机变量，故 X 取任何单点值的概率为 0. 所以

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{-y+1 \leqslant X \leqslant y+1\} \\
&= \int_{-y+1}^{y+1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-y+1}^{1} x\mathrm{d}x + \int_{1}^{y+1} (2-x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \Big|^{1} \quad + 2x \Big|^{y+1} - \frac{x^2}{2} \Big|^{y+1}
\end{aligned}
$$

$$=1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^n. \qquad n=1,2,\cdots$$

又 $\{X=n\}=\{X\leqslant n\}-\{X\leqslant n-1\}=A_n-A_{n-1}$

$\therefore P(X=n)=P(A_n)-P(A_{n-1})$

$$=\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{n-1}\cdot\frac{p}{\omega} \qquad n=1,2,\cdots$$

18. 若 X 为只取非负整数值的随机变量,满足

$$P(X>k+l\mid X>k)=P(X>l)$$

其中 k,l 为非负整数．则称 X 具有无记忆性．证明:几何分布具有无记忆性;反之若 X 为非负整值离散型随机变量,且具有无记忆性,则 X 必服从几何分布．

证明 若 X 服从几何分布,则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,3,\cdots,0<p<1.$$

于是对任意非负整数 k,l,

$$P(X>k+l\mid X>k)$$

$$=\frac{P(X>k+l)}{P(X>l)}=\frac{\sum\limits_{i=k+l+1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}}{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}}=(1-p)^l.$$

而 $$P(X>l)=\sum_{i=l+1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}=(1-p)^l.$$

于是 $$P(X>k+l\mid X>k)=P(X>l).$$

$\therefore X$ 具有无记忆性．

反之,记 $q_k=P(X>k),p_k=P(X=k)$,于是我们有

$$p_{k+1}=q_k-q_{k+1},$$

并且在已知 $X>k$ 的条件下,$X=k+1$ 的条件概率为 p_{k+1}/q_k．于是由无记忆性可知:

$$\frac{p_{k+1}}{q_k}=P(X=1)\triangleq p;$$

即 $$\frac{q_{k+1}}{q_k}=1-p.$$

注意到 $q_0=1$,则 $q_k=(1-p)^k$．因此

$$p_k=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$$

即 X 服从几何分布．

19. 若 X 为非负连续型随机变量,满足

$$P(X>s+t\mid X>t)=P(X>s).$$

其中 s,t 为非负数,则称 X 具有无记忆性．

证明若 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 X 必具有无记忆性;反之若 X 具有无记忆性且为非负连续型随机变量,则 X 必服从指数分布．

证明 若 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

于是 $$P\{X>s+t\mid X>t\}$$

$$= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}.$$

$$P(X > s) = 1 - F(s) = e^{-\lambda s}.$$

$\therefore P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$,

即 X 具有无记忆性．

反之，若 X 具有无记忆性，且非负，记其分布函数为 $F(x)$．并记

$$G(x) = P(X > x).$$

由无记忆性得知：$G(s+t) = G(s)\cdot G(t)$　对一切 $s \geqslant 0, t \geqslant 0$ 成立．

又 $G(x) = 1 - F(x)$ 关于 x 单调不增，故由分析中的结果知：

$$G(x) = a^x \qquad x \geqslant 0$$

由于 $G(x)$ 为概率，故 $0 < a < 1$．于是存在 $\lambda > 0$，使 $a = e^{-\lambda}$．

又 $F(x)$ 为非负连续型随机变量的分布函数，故有

$$F(x) = 1 - G(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geqslant 0$$

即 X 服从参数为 λ 的指数分布．

20.　设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布．求相继两次故障之间的时间间隔 T 的分布函数．

分析　解此题的关键是搞清楚下述等式：当 $t > 0$ 时，

$$\{T > t\} = \{N(t) = 0\}$$

解　$\because \{T > t\} = \{N(t) = 0\}$

(2)你需要等待 10～20 分钟;

(3)你已等了 10 分钟还需要等 10 分钟以上.

6. 对目标进行 5000 次独立射击,设每次击中的概率为 0.001,求至少有两次命中的概率.

7. 试判别 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$在如下区间上定义是否为密度函数:

(1)$x\in(-\infty,+\infty)$;

(2)$x\in(-\infty,0)$;

(3)$x\in(0,+\infty)$.

8. 设随机变量 X 的分布函数为

$$(1)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<-a;\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & |x|\leqslant a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

$$(2)\ F(x)=A+B\arctan\frac{x}{2}.$$

试确定常数 A,B.

9. 已知随机变量 X 的分布函数为:

$$(1)\ F(x)=\begin{cases}1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \sin x, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$(3)\ F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求 X 的概率密度函数.

10. 设 $F_1(x),F_2(x)$均为分布函数,问

(1)$F_1(x)+F_2(x)$是否为分布函数?

(2)若 a_1,a_2 为正常数,且 $a_1+a_2=1$,$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$是否为分布函数?

(3)$F_1(x)\cdot F_2(x)$是否为分布函数呢?

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{x}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}Cx^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $p>0,q>0$ 为常数.

(3) $f(x)=C\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty.$

分别求常数 C.

12. 设随机变量 X 的分布密度为:

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

分别求

(1)分布函数 $F(x)$;

(2) $P(X\leqslant\frac{3}{2}), P(X>\frac{1}{2})$.

13. 设随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \frac{x}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ \frac{2}{3}, & 1\leqslant x<2;\\ \frac{3}{4}, & 2\leqslant x<3;\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

作出 $F(x)$的图形并求 $P(X<3), P(X=\frac{1}{2})$及 $P(2\leqslant X<4)$.

14. 设 $X\sim N(60,3^2)$,求分点 x_1,x_2,x_3,x_4 使 X 落在$(-\infty,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,+\infty)$中的概率之比为 7:24:38:24:7.

15. 试证:

若 $P\{X\leqslant x_2\}\geqslant 1-\beta, P\{X\geqslant x_1\}\geqslant 1-\alpha$ 则 $P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}\geqslant 1-(\alpha+\beta), x_1<x_2$.

16. 已知某类元件使用寿命 T 服从参数 $\lambda=\frac{1}{10000}$的指数分布(单位:小时).

(1)从这类元件中任取一个,求其使用寿命超过 5000 小时的概率.

(2)某系统独立地使用 10 个这种元件,求在 5000 小时之内这些元件不必更换的个数 X 的分布律.

17. 某加工过程,若采用甲工艺条件,则完成时间 $X\sim N(40,8^2)$;若采用乙工艺条件,则完成时间 $Y\sim N(50,4^2)$(单位:小时).

(1)若要求在 60 小时内完成,应选何种工艺条件?

(2)若要求在 50 小时内完成,应选何种工艺条件?

18. 设某批零件的长度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,今从这批零件中任取 5 个,求正好有 2 个长度小于 μ 的概率.

19. 已知 $X\sim N(0,1)$,求

(1) $Y=aX+b$;

(2) $Y=|X|$;

(3) $Y=2X^2+1$.

的概率密度．

20. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续且严格单调，求 $Y=F(X)$ 的分布函数．

21. 设某仪器寿命 T(小时) $\sim N(500,50^2)$，求该仪器使用超过 400 小时的概率．并确定一个允许限 t，使仪器寿命在 $(500-t,500+t)$ 之间的概率不小于 0.95.

22. 在编号为 $1,2,\cdots,N$ 的 N 个球中有放回地随机取 n 次，求 n 次抽取中最大号码 U 和最小号码 V 的分布．

23. 设 X 分别为服从 $U\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$U[0,\pi]$，$U[0,2\pi]$ 的随机变量，求 $Y=\sin X$ 的概率密度函数．

24. 选择题：在每个小题的四个选项中，只有一个符合题目要求。

(1)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，当 μ 减小，σ 增大时，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$

(A)单调增大；　　(B)单调减小；

(C)保持不变；　　(D)增减不定．

(2)设 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，$\sigma_1\neq\sigma_2$ 记 $p_1=P(X\leqslant\mu-\sigma_1)$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+\sigma_2\}$，则

(A)对任何实数 μ，均有 $p_1=p_2$；　　(B)对任何实数 μ，均有 $p_1<p_2$；

(C)对任何实数 μ，均有 $p_1>p_2$；　　(D)只对个别的实数 μ，才有 $p_1=p_2$.

25. 设流入某水库的总水量 X(单位：百万立方米)服从 $[4,8]$ 上的均匀分布．但水库最大容量为 7，超过 7 的水要溢出，求水库存水量 Y 的分布函数．

答案与提示

1. 分布列

X	0	1	2	3
P	0.75	0.204	0.041	0.05

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 0.75, & 0\leqslant x<1;\\ 0.954, & 1\leqslant x<2;\\ 0.995, & 2\leqslant x<3;\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

2. $p^i q\quad (i=0,1,2,\cdots)$

3. $pq^{n-1}+qp^{n-1}\quad (n=2,3,4,\cdots)$

5. (1) $e^{-1}\approx 0.368$

(2) $e^{-1}-e^{-2}\approx 0.233$

(3) $e^{-1}\approx 0.368$

6. $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.956$

7. (1)是　　(2)不是　　(3)不是

8. (1) $A=\frac{1}{2}$　　$B=\frac{1}{\pi}$　　$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(2) $f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+4}$，$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$

9. (1)$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0; \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0<x\leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

(3)$f(x)=\begin{cases} \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-3}, & x>0; \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$

10. (1)不是;(2)是;(3)是

11. (1)$C=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

(2)$C=\dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}$

(3)$C=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$

12. (1)$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0; \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 1; \\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & 1<x\leqslant 2; \\ 1, & x>2 \end{cases}$

$P(X\leqslant \frac{3}{2})=\frac{7}{8}, P(X>\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$

(2)$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ \dfrac{1}{\pi}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1; \\ 1, & x\geqslant 1 \end{cases}$

$P(X\leqslant \frac{3}{2})=1, P(X>\frac{1}{2})=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$

13. $P(X<3)=\frac{3}{4}; P(X=\frac{1}{2})=0; P(2\leqslant X\leqslant 4)=\frac{1}{3}$

14. $x_1=55.5, x_2=58.5, x_3=61.5, x_4=64.5$

15. (略)

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$

(3) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1;\\ 0, & y\leqslant 1\end{cases}$

20. $Y\sim U[0,1]$

21. $\Phi(2)=0.977,\quad t\geqslant 98$

22. $P(U=k)=\dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n},\quad (k=1,2,\cdots,N)$

$P(V=k)=\dfrac{(N-k+1)^n-(N-K)^n}{N^n}\quad (k=1,2,\cdots,N)$

23. $f_1(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$

$f_2(x)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}},\quad 0<x<1$

$f_3(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1$

24. (1)C; (2)A

25. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<4;\\ \dfrac{y-4}{4}, & 4\leqslant y<7;\\ 1, & y\geqslant 7\end{cases}$

第三章 多维随机变量及其分布

一、基本要求

①了解多维随机变量的概念,理解二维随机变量的联合分布函数及其性质,了解二维连续型随机变量的联合概率密度及其性质,了解二维离散型随机变量的联合分布律及其性质,并会用它们计算有关事件的概率.

②掌握二维随机变量的边缘分布与联合分布的关系.了解二维随机变量的条件分布.

③理解随机变量独立性的概念,熟练掌握应用随机变量的独立性进行概率计算.

④会求两个随机变量的简单函数的概率分布.

⑤了解二维均匀分布、二维正态分布.

二、内容提要

1. 二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数

(1)定义:定义在同一样本空间上的两个随机变量 X,Y 构成的有序二维数组(X,Y)称为二维随机变量.对于任意实数 x,y,记

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y). \tag{3.1}$$

称 $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数,而一元函数

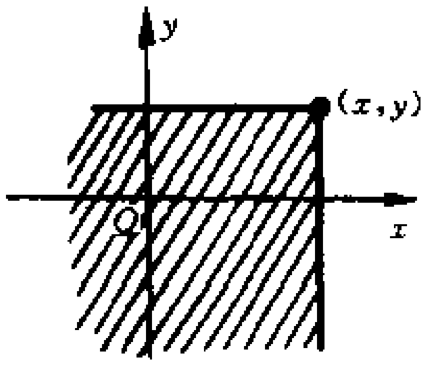
$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y<+\infty). \tag{3.2}$$

称为(X,Y)的分量 X 的边缘分布函数.类似地

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X<+\infty,Y\leqslant y). \tag{3.3}$$

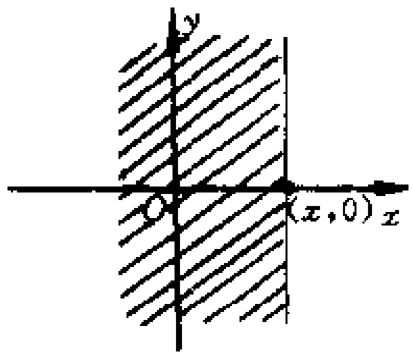
称为(X,Y)的分量 Y 的边缘分布函数.

视(X,Y)为 xoy 平面上的随机点,可以看出 $F(x,y)$,$F_X(x)$,$F_Y(y)$的几何直观意义.



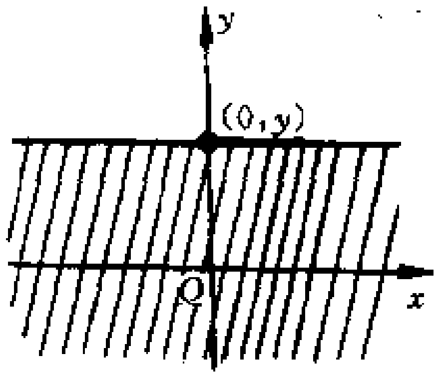
$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$

图 3-1



$F_X(x)=P(X\leqslant x)$

图 3-2



$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)$

图 3-3

(2)二维随机变量的联合分布函数的性质.

①$F(x,y)$对每一个变量都是单调非降函数．

②对任意固定的 x,y,有

$F(x,y)\in[0,1]$;

$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$;

$F(-\infty,-\infty)=0$ (3.4);

$F(+\infty,+\infty)=1$;

而 $F(x,+\infty)=F_X(x), F(+\infty,y)=F_Y(y)$.

③$F(x,y)$对每一个变量都是右连续的．

④$F(x,y)$满足矩形不等式:

对任意实数 $x_1<x_2, y_1<y_2$,有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$
$$=P\{X\in(x_1,x_2], Y\in(y_1,y_2]\}\geqslant 0. \quad (3.5)$$

(3.5)式对 $x_2,y_2\to+\infty, x_1,y_2\to-\infty$ 仍成立．如令 $x_2,y_2\to+\infty$, x_1,y_1 固定,于是

$F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,y_1)-F(x_1,+\infty)+F(x_1,y_1)=P\{X>x_1,Y>y_1\}$.

即 $1-F_Y(y_1)-F_X(x_1)+F(x_1,y_1)=P\{X>x_1,y>y_1\}$.

类似地,引入 n 维随机变量的联合分布函数和一维边缘分布函数的概念．

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 n 维随机变量,对 n 个任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,令

$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$

则称 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数．

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$,则称它们为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一维边缘分布函数．

n 维随机变量的联合分布函数也有类似于二维随机变量的联合分布函数的四条性质．

2. 二维离散型随机变量的概率分布

(1)若二维随机变量(X,Y)的可能取值是有限多个或可列无穷多个,则称(X,Y)为二维离散型随机变量．

(2)(X,Y)为二维离散型随机变量$\Leftrightarrow$其分量 X,Y 均为一维离散型随机变量．

(3)二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布可用表格形式表示如下:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

其中 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P((X,Y)=(x_i,y_j)) \quad (i,j=1,2,\cdots)$ (3.6)

则称它为二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律．

上述表格称为二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布矩阵．

p_{ij}具有下述性质：

① $p_{ij} \geqslant 0$,　$i, j = 1, 2, \cdots$

② $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

(4)二维离散型随机变量的联合分布律与边缘分布律的关系．

若(X, Y)的联合分布律为

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

X 的分布律

$$P(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}. \tag{3.7}$$

称为(X, Y)的分量 X 的边缘分布律，同样 Y 的分布律

$$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}. \tag{3.8}$$

称为(X, Y)的分量 Y 的边缘分布律．

3．二维连续型随机变量

(1)定义：设(X, Y)的联合分布函数为 $F(x, y)$，若存在非负可积函数 $f(x, y)$，使得对任意实数 x, y 均有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.9}$$

则称(X, Y)为连续型随机变量，并称 $f(x, y)$为(X, Y)的联合密度函数．

联合密度函数具有下述性质：

①$f(x, y) \geqslant 0$. (3.10)

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$. (3.11)

上述两条为联合密度函数的特征性质．

③在 $f(x, y)$的连续点(x, y)处有

$$f(x, y) = \frac{\partial F^2(x, y)}{\partial x\, \partial y}. \tag{3.12}$$

④(X, Y)落入具有某种性质* 的区域 D 内的概率可表示为，

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.13}$$

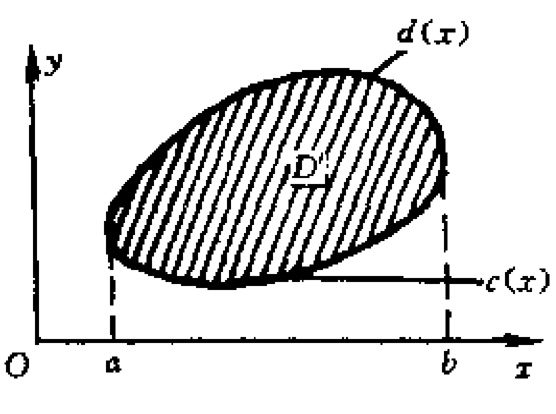


图 3－4

计算 $f_X(x)$，$f_Y(y)$的方法如下：

先求出 $f(x, y) \neq 0$ 的区域 D' 往 X 轴上的投影区间$[a, b]$(如图 3－4)，则

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y, & x \in [a, b]; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{3.14}$$

$f_Y(y)$可同理计算．

* 准确地说，D 是二维 Borel 集合．

(2)二维正态随机变量．

若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}. \tag{3.15}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为参数，$\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称$(X,Y)$服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，此时 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$．

(3)(X,Y)为连续型随机变量，而 D 为平面上一个面积大于零的有界区域

若(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{ 的面积}}, & (x,y)\in D;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{3.16}$$

则称(X,Y)在平面区域 D 上服从均匀分布．

4．二维随机变量的条件分布

(1)二维离散型随机变量的条件分布律．

设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j);\qquad i,j=1,2\cdots$$

它的边缘分布律为

$$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij};\qquad i=1,2\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P(Y=y_i)=\sum_i p_{ij};\qquad j=1,2\cdots$$

当 $p_{\cdot j}>0$ 时，称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.\qquad i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 的条件下，X 的条件分布律，记为 $P_{X|Y}(x_i|y_j)$，即

$$P_{X|Y}(x_i|y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.\qquad i=1,2,\cdots \tag{3.17}$$

当 $p_{i\cdot}>0$ 时，称

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}.\qquad j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 的条件下，Y 的条件分布律，记为 $P_{Y|X}(y_j|x_i)$，即

$$P_{Y|X}(y_j|x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}.\qquad j=1,2,\cdots \tag{3.18}$$

易知条件分布律有下述性质：

①$P_{X|Y}(x_i|y_j)\geqslant 0$，$P_{Y|X}(y_j|x_i)\geqslant 0$；

② $\sum\limits_i P_{X|Y}(x_i|y_j)=1$，　$\sum\limits_j P_{Y|X}(y_j|x_i)=1$．

(2)二维连续型随机变量的条件分布．

设(X,Y)为二维连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$，X,Y的边缘概率密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，假定$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$均为连续函数，且$f_Y(y)>0$，于是可推得：

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}t. \tag{3.19}$$

其中$F_{X|Y}(x|y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0^+}P(X\leqslant x|y<Y\leqslant y+\Delta y)$.

由上可知在条件$(Y=y)$下，X的条件分布仍是连续型的，其概率密度为$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，称它为在$Y=y$条件下，X的条件概率密度，记为$f_{X|Y}(x|y)$，即

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{3.20}$$

当$f_X(x)>0$时，可类似有

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,t)}{f_X(x)}\mathrm{d}t. \tag{3.21}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}. \tag{3.22}$$

容易验证：二维随机变量的条件概率密度具有一维随机变量的概率密度的性质．

(3)若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则

$$f_{X|Y}(x|y)\sim N(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2),(\sigma_1\sqrt{1-\rho^2})^2);$$

$$f_{Y|X}(y|x)\sim N(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2).$$

结论：二维正态分布的条件分布是一维正态分布．

5. 随机变量的独立性

(1)定义：设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布函数为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，若对$\forall x,y\in\mathbf{R}$，均有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y). \tag{3.23}$$

即

$$P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)\cdot P(Y\leqslant y)$$

则称X,Y相互独立，简称X,Y独立．

(2)X,Y相互独立的判别法．

①对直线上的具有某种性质* 的集合A,B，有$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\cdot P(Y\in B)\Leftrightarrow X,Y$独立．

②若(X,Y)为二维连续型随机变量，其边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，X,Y相互独立$\Leftrightarrow$二元函数$f_X(x)\cdot f_Y(y)$是(X,Y)的联合概率密度函数．

③若(X,Y)为离散型随机变量，X,Y独立$\Leftrightarrow$对(X,Y)的所有可能取的值(x_i,y_j)有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j). \tag{3.24}$$

(3)若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X,Y$独立$\Leftrightarrow\rho=0$.

---

* A,B为直线上的Borel集．

(4)随机变量独立性的概念可以推广到有限个或可列无穷多个随机变量的情况．

定义　设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 n 维随机变量，其联合分布函数和一维边缘分布函数分别为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2)$，$\cdots$，$F_{X_n}(x_n)$，若对任意的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\cdots\cdot F_{X_n}(x_n). \tag{3.25}$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立．

定义　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一列随机变量，若其中任意有限个随机变量是相互独立的，则称这一列随机变量是独立的．

6. 随机变量的简单函数的概率分布

①两个相互独立的正态随机变量的线性函数仍为正态变量，即若 X,Y 独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $k_1X_1+k_2X_2+b\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2+b,\ \sum\limits_{i=1}^{2}k_i^2\sigma_i^2)$，这里 $k_1\cdot k_2\neq 0$，k_1,k_2,b 均为常数．

②一般 n 个相互独立的正态随机变量 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)$，这里 a_i 为常数，且不全为 0.

③一般求二维连续型随机变量(X,Y)的函数 $Z=\varphi(X,Y)$的概率分布，可用分布函数法求之，即

$$P(Z\leqslant z)=P(\varphi(X,Y)\leqslant z)=\iint\limits_{\varphi(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.26}$$

化为二重积分计算．

④对于 $Z=X+Y$，设(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y. \tag{3.27}$$

其中 $f_Z(z)$为 Z 的密度函数．

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$ 的计算方法：(以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$ 为例)

先将 $f(x,z-x)\neq 0$ 的区域 D_1 在 xoy 平面上画出来，再将 D_1 在 z 轴的投影 D_{1z}求出，记 D_{1z}为$[c,d]$(见图 3－5)，则有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{a(z)}^{b(z)}f(x,z-x)\mathrm{d}x, & z\in[c,d];\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

事实上，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 与 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$ 的计算方法相同．

⑤设 X,Y 独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$，$\min(X,Y)$的分布函数分别为

$$\left.\begin{aligned}&F_{\max(X,Y)}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z);\\ &F_{\min(X,Y)}(z)=1-(1-F_X(z))\cdot(1-F_Y(z)).\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

⑥已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立，

a. 若 $\varphi_1(X_1),\varphi_2(X_2),\cdots,\varphi_n(X_n)$分别是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，则 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 相互独立．

b. 若 φ 是$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中某k 个随机变量 $X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k}$的函数*，$\psi$ 是另外 l 个随机变量 $X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_l}$的函数，则 φ,ψ 相互独立．

⑦设 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度为 $f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，又设有 n 元函数 $u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,n$，满足：

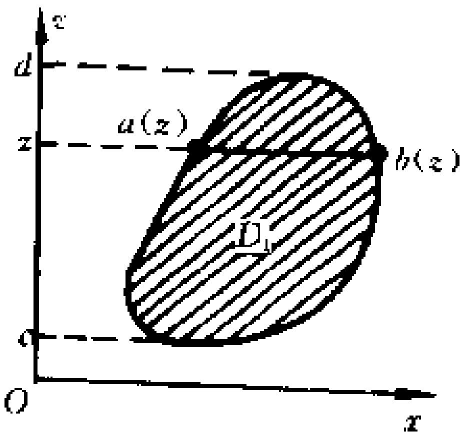


图 3-5

a. 存在唯一的反函数 $x_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，即方程

$$u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_i, \qquad (*)$$

存在唯一实数解 $x_i(y_1,y_2,\cdots,y_n),i=1,2,\cdots,n$；

b. $u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $x_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$都连续，$i=1,2,\cdots,n$；

c. 存在连续的偏导数$\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j},\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j},i,j=1,2,\cdots,n$. 则 $Y_i=u_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ i=1,2,\cdots,n$，构成的 n 维随机变量$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的联合概率密度为

$$f_Y(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=\begin{cases}f_X(x_1(y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots,x_n(y_1,y_2,\cdots,y_n))\cdot|J|, & \text{当}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\text{使}(*)\text{有解时；}\\ 0, & \text{反之}.\end{cases} \qquad (3.29)$$

其中 J 为 Jacobi 行列式，即

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

三、问题与思考

1. 若 X 与 Y 独立同分布，可否认为 $X=Y$?

答 否，举个简单的例子．

设 X 与 Y 独立且都服从 0－1 分布，$p=\dfrac{1}{2}$，则(X,Y)的联合分布如下：

* 这里的函数指普通函数．

X \ Y	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	4

于是

$$P(X\neq Y)$$
$$=P(X=1,Y=-1)+P(X-1,Y=1)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

2. 联合密度函数连续是否能推出边缘密度函数也连续?

答 否．表面来看,联合密度函数经积分后得到边缘密度函数,似乎边缘密度函数的性质更优于联合密度函数,其实未必．例如,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x-\frac{(y-\frac{1}{x})^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\qquad -\infty<y<+\infty.$$

不难验证,$f(x,y)$在整个平面上连续,而边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续．

3. 对二维离散型随机变量,可定义为其分量均为一维离散型随机变量,那么对二维连续型随机变量可否也类似定义为其分量均为一维连续型随机变量?

答 否．无论是一维还是多维,在定义连续型随机变量时,其本质是它有概率密度函数,即存在非负函数 f 满足本书第二章(2.17)和(2.18)式且 $P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$. 对于多维也同样．在概率论的理论上,将连续型随机变量定义为:存在密度函数的随机变量,至于它可以在一个区间或区域内连续取值倒不是本质的,甚至也是不确切的．与多维离散型随机变量的定义不同,多维连续型随机变量不能简单定义为“其分量均为一维连续型随机变量的那种随机变量”．我们可举反例如下:

设 $Z_1\sim U[0,1]$, $Z_2=Z_1$,则随机变量(Z_1,Z_2)的两个分量 Z_1,Z_2 均为连续型随机变量,但(Z_1,Z_2)却只能在单位正方形的对角线上取值,于是不可能存在$f(x,y)$满足本章(3.11)式(二元函数在平面上任意的直线上的二重积分均为 0),即(Z_1,Z_2)不可能存在概率密度函数,于是(Z_1,Z_2)不是二维连续型随机变量．

4. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & x^2+y^2<2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 是一个密度函数吗?

$F(x,y)=\begin{cases}1 & x+y>1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 是一个分布函数吗?

答 $f(x,y)$为密度函数必须具有下述两性质:

① $f(x,y)\geqslant 0$;

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$.

而此处 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(x^2+y^2)dxdy=2\pi\neq 1$,故 $f(x,y)$不是一个密度函

数.

作为一个二元分布函数,应满足矩形不等式,即对于$\forall x_1<x_2,y_1<y_2$有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1+y_1)\geqslant 0.$$

对于此处的$F(x,y)$,取$x_1=\frac{1}{3},x_2=1,y_1=\frac{1}{2},y_2=1$,则

$$F(1,1)-F(\frac{1}{3},1)-F(1,\frac{1}{2})+F(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=-1\ngeqslant 0.$$

于是此处$F(x,y)$不是一个分布函数.

5. 若联合密度函数不是连续的,其边缘密度函数可能连续吗?

答 可能.设$g(x)$为任意一个连续的密度函数,满足$g(0)>0,g(-x)=g(x)$(这样的函数存在,如标准正态的密度函数).我们定义:

$$f(x,y)=\begin{cases}2g(x)\cdot g(y), & xy>0;\\ 0, & xy\leqslant 0.\end{cases}$$

则显然有

①$f(x,y)\geqslant 0$.

②$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{xy>0}2g(x)\cdot g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}2g(x)\cdot g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}2g(x)\cdot g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\xlongequal{\text{对称性}}2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1.$

所以$f(x,y)$为一个概率密度函数,这里$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续,而边缘密度函数$g(x),g(y)$均连续.

6. 我们已知联合分布为二维正态分布则其边缘分布均为一维正态分布,反之如何呢?

答 边缘分布为一维正态,其联合分布可能为二维正态,也可能不是二维正态,我们可以举出不少这方面的例子.如:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\cos x\cos y, & |x|<\pi,\ |y|<\pi,\\ \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, & \text{其它}.\end{cases}$$

则

① $f(x,y)$是一个二元密度函数.

即$f(x,y)\geqslant 0$, 显然.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=1+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$

②$f(x,y)$的边缘分布是正态分布.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$

当 $|x|<\pi$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}\cos x\cos y\,dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

当 $|x|>\pi$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

于是 $f_X(x)\sim N(0,1)$,

同理 $f_Y(y)\sim N(0,1)$.

③X,Y 不独立．这是因为 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 不是 (X,Y) 的联合概率密度．

④联关系数 $\rho_{XY}=0$.　因为

$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$,

$E(X)=E(Y)=0\quad D(X)=D(Y)=1$.

于是 $\rho_{XY}=\cos(X,Y)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xy\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}\cos x\cos y\,dxdy$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)$$
$$+\left(\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}y\cos y\,dy\right)\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi^2}{2}}=0.$$

⑤$f(x,y)$ 不是二元正态密度函数．若 $f(x,y)$ 为二元正态密度函数,则由 $\rho_{XY}=0$ 可推出 X,Y 独立．这与 X,Y 不独立是矛盾的．所以 (X,Y) 的分布密度 $f(x,y)$ 不可能是二元正态密度函数．

7. 联合分布为均匀分布是否能得到其边缘分布也是均匀分布?

答　否．设 D 为 $x^2+y^2\leqslant r^2(r>0)$ 所表示的区域,随机变量 (X,Y) 的联合密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}=\dfrac{1}{\pi r^2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布,但

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\leqslant r;\\ 0, & |x|>r.\end{cases}$$

不是均匀分布．

8. 设 (X,Y) 为二维随机变量,对任意的实数 x,y, $P(X>x,Y>y)=1-P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$ 吗?

答　不对．因为 $\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$ 与 $\{X>x,Y>y\}$ 不是对立事件．

9. 设随机变量 X_1,X_2 独立且都服从 $N(0,1)$，证明：X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立．

证明 由参考书目〔1〕P92 定律 3.11 知：

X_1+X_2 与 X_1-X_2 的联合密度函数

$g(x,y)=f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)|J|$，

其中 $f(x,y)$ 是 (X_1,X_2) 的联合密度函数，由题意知：

$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

J 为 Jacobi 行列式，即

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}g(x,y)&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}{2}}\left|-\frac{1}{2}\right|\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2(\sqrt{2})^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2(\sqrt{2})^2}}.\end{aligned}$$

可见 $g(x,y)$ 是 X_1+X_2 与 X_1-X_2 的密度函数之积，所以 X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立．

10. 两个随机变量的密度函数不同，它们的分布函数可能相同吗？

答 可能．如：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1];\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1);\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

显然 $f(x)\neq g(x)$，但对应的分布函数却相同，均为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

11. 正态随机变量的和仍为正态随机变量吗？

答 我们知道，独立的正态随机变量之和仍为正态变量，但对不独立的正态随机变量之和就未必是正态随机变量了．如：

设 $X_1\sim N(0,1)$，Y 是参数为 $p=\frac{1}{2}$ 的 0－1 分布．又设 X_1 与 Y 独立．令

$$X_2=\begin{cases}X_1, & \text{当 } Y=0 \text{ 时};\\ -X_1, & \text{当 } Y=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

分别求 $X_2,Z=X_1+X_2$ 的分布．

$$\begin{aligned}P(X_2\leqslant x)&=P(Z_2\leqslant x,Y=0)+P(X_2\leqslant x,Y=1)\\&=P(X_1\leqslant x)\cdot\frac{1}{2}+P(-X_1\leqslant x)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(\Phi(x)+1-\Phi(-x))=\Phi(x).\end{aligned}$$

即 $X_2 \sim N(0,1)$. 但 X_1+X_2 不是正态随机变量.

事实上,

$$P(X_1+X_2=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

于是 X_1+X_2 是非连续型随机变量,更谈不上是正态变量了.

进一步,用类似的方法,可求得 $Z=X_1+X_2$ 的分布函数为:

$$F_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{z}{2}\right), & z<0;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{z}{2}\right), & z\geqslant 0\end{cases}$$

12. 我们知道,若 X 与 Y 独立,则 $g_1(X)$ 与 $g_2(Y)$ 独立(这里 $g_1(x)$, $g_2(y)$ 为普通函数*),反之如何呢?

答 若 $g_1(X)$ 与 $g_2(Y)$ 独立,X 与 Y 未必独立.反例如下:

设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+u(x)v(y)}{4a^2}, & |x|\leqslant a, |y|\leqslant a;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

这里 $a>0$ 是常数,$u(x)$, $v(y)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续奇函数,且 $0<|u(x)v(y)|<1$

由于 $u(x)$, $v(y)$ 均为对称区间上的奇函数,

故

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x|\leqslant a;\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |y|\leqslant a;\\ 0, & |y|>a.\end{cases}$$

又 $u(x)v(y)$ 不等于零,故当 $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$ 时,

$$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

所以 X 与 Y 不独立.但是可以证明 X^2 与 Y^2 是独立的.

事实上,(X^2,Y^2) 的联合分布函数

$$F_{(X^2,Y^2)}(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0;\\ \frac{1}{a^2}\sqrt{xy}, & 0<x\leqslant a^2, 0<y\leqslant a^2;\\ \frac{1}{a}\sqrt{x}, & 0<x\leqslant a^2, \quad y>a^2;\\ \frac{1}{a}\sqrt{y}, & x>a^2, \quad 0<y\leqslant a^2;\\ 1, & x>a^2, \quad y>a^2.\end{cases}$$

而 X^2 与 Y^2 的分布函数分别为:

---

* 准确讲是一维 Borel 可测函数.

$$F_{X^2}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \frac{1}{a}\sqrt{x}, & 0<x\leqslant a^2;\\ 1, & x>a^2.\end{cases}$$

$$F_{Y^2}(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ \frac{1}{a}\sqrt{y}, & 0<y\leqslant a^2.\\ 1, & y>a^2.\end{cases}$$

于是 $F_{(X^2,Y^2)}(x,y)=F_{X^2}(x)\cdot F_{Y^2}(y)$.

故 X^2 与 Y^2 独立．这表明,虽然 X^2 与 Y^2 独立,但推不出 X,Y 独立．

可以证明,当 $g_1(x),g_2(y)$ 均为一一对应函数时,若 $g_1(X)$ 与 $g_2(Y)$ 独立,则可推得 X 与 Y 独立．

四、典型例题

1. 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求(1)系数 A,(2)联合分布函数 $F(x,y)$,(3)$P(X>1)$,(4)$P((X,Y)\in D)$,其中 $D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$,(5)$P(X\geqslant Y)$,(6)$f_X(x),f_Y(y)$,(7)$P(X+2Y\leqslant 1)$,(8)$Z=\frac{X+Y}{2}$的概率密度．

解(1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,

即
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\Rightarrow A=1$$

(2) 当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^x\int_0^y e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=(1-e^{-x})(1-e^{-y}).$$

当 x,y 为其他值时,$F(x,y)=0$,

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(3) $P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-F_X(1)$
$$=1-F(1,+\infty)=e^{-1}=0.3679.$$

(4) $P\{X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$$=\int_0^1[e^{-x}[\int_0^{1-x}e^{-y}\,\mathrm{d}y]]\mathrm{d}x$$
$$=1-2e^{-1}=0.2642.$$

(5) $P\{X \geqslant Y\} = \iint\limits_{x \geqslant y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0\\ x\geqslant y}} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}$.

(6) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

同理 $f_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y \geqslant 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

(7) $P(X+2Y \leqslant 1) = \iint\limits_{x+2y\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int\int\limits_{\substack{x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 1}} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$= 1 + \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = (1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})^2$.

(8) 方法 1:先求分布函数,再求导.

当 $z \geqslant 0$ 时,

$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P\left(\dfrac{Z+Y}{2} \leqslant z\right) = P(Z+Y \leqslant 2z)$

$= \int\int\limits_{x+y\leqslant 2z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int\limits_{\substack{x+y\leqslant 2z\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0}} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \int_0^{2z} \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{2z-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^{2z} \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{x-2z})\mathrm{d}x$

$= 1 - \mathrm{e}^{-2z} - 2z\mathrm{e}^{-2z}$.

当 $z<0$ 时,由于 X,Y 取值非负,故 $F_Z(z)=0$,

$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2z}-2z\mathrm{e}^{-2z}, & z \geqslant 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$

求导得:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 4z\mathrm{e}^{2z}, & z \geqslant 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

方法 2:先求出 $f_Z(z)$ 的一般公式,再计算.

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P\left(\frac{Z+Y}{2} \leqslant z\right) = P(Z+Y \leqslant 2z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\leqslant 2z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{2z-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

两边对 z 求导得:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{2z-x}f(x,y)dy\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}2f(x,2z-x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2z-x)dx.$$

为了求 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2z-x)dx$,先将 $f(x,2z-x)\neq0$ 的区域画出来．于是

$$f_Z(z)=\begin{cases}2\int_0^{2z}e^{-(x+2z-x)}dx, & z\geq0;\\ 0, & z<0.\end{cases}$$
$$=\begin{cases}4ze^{-2z}, & z\geq0;\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

2. 设(X,Y)是二维随机变量,X,Y独立且都服从$U[0,1]$,求 $Z=|X-Y|$的密度．

解 先求 Z 的分布函数．

$\because X,Y$ 独立,故(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq1,\quad 0\leq y\leq1;\\ 0, & 其它．\end{cases}$$

当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0\leq z\leq1$ 时,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\leq z}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\substack{-z\leq x-y\leq z\\0\leq x\leq1\\0\leq y\leq1}}1dxdy$$
$=1\times$积分域面积
$$=1\times\left(1-\frac{(1-z)^2}{2}\cdot2\right)$$
$$=2z-z^2.$$

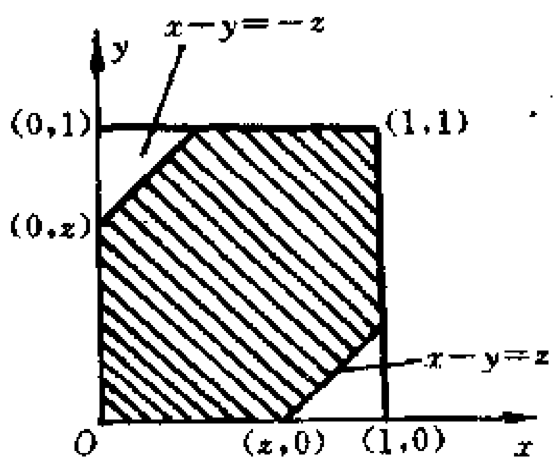


图 3－6

当 $z>1$ 时,$F_Z(z)=1$,

再求 Z 的分布密度

$$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}2-2z, & 0\leq z\leq1;\\ 0, & 其它．\end{cases}$$

3. 设(X,Y)的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x,\quad 0<x<1;\\ 0, & 其它．\end{cases}$$

求 $Z=X-Y$ 的分布密度．

解 $\because F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X-Y\leq z)=\iint\limits_{x-y\leq z}f(x,y)dxdy$,

$\therefore$当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$.

当$0<z<1$时,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{x-y\leq z\\0<y<x\\0<x<1}}3xdxdy=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3,$$

当 $z\geq1$ 时,$F_Z(z)=1$

$$\therefore\quad f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

4. 设(ξ,η)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{xy}{4}, & |x|<1 \quad |y|<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则ξ与η不独立,但ξ^2与η^2独立.

解 直接参见本章问题与思考中12中的反例.一般讲,由ξ与η独立可推出ξ与η^2独立,但由ξ与η^2独立并不能推出ξ与η独立.我们再看此题.

ξ与η不独立,我们已有结论,而此处ξ与η^2却独立.事实上,ξ的分布函数为:

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}f_\xi(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\leqslant-1;\\ \dfrac{1}{2}(x+1), & |x|<1;\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$$

η^2的分布函数为:

$$F_{\eta^2}(y)=P(\eta^2\leqslant y)$$

$$=\begin{cases}0, & y\leqslant0;\\ \sqrt{y}, & 0<y<1;\\ 1, & y\geqslant1.\end{cases}$$

(ξ,η^2)的联合分布函数为:

$$F_{\xi,\eta^2}(x,y)=P(\xi\leqslant x,\eta^2\leqslant y)$$

$$=\begin{cases}P(\xi\leqslant x)=\dfrac{1}{2}(1+x), & |x|<1,y\geqslant1;\\ P(\eta^2\leqslant y)=\sqrt{y}, & x\geqslant1,\quad 0\leqslant y<1;\\ \displaystyle\iint\limits_{\substack{t\leqslant x\\ s^2\leqslant y}}\frac{1+st}{4}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+st}{4}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\frac{1+x}{2}\cdot\sqrt{y}, & |x|<1,0<y<1;\\ 0, & x\leqslant-1\text{ 或 }y\leqslant0;\\ 1, & x\geqslant1,y\geqslant1.\end{cases}$$

由此可知:$F_{\xi,\eta^2}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_{\eta^2}(y)$,对任意$x,y$都成立,于是$\xi$与$\eta^2$独立.由[1]P88定律3.7可知,$\xi^2$与$\eta^2$独立.

5. 判断下列X,Y是否独立.其中(X,Y)的联合密度函数如下:

$$(1)f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$(2)f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x<y,\quad 0\leqslant y\leqslant1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

解 (1)$f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$是(X,Y)的联合密度函数,所以 X 与 Y 是独立的.

$$(2) f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 8xy\mathrm{d}y=4x-4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 8xy\mathrm{d}y=4y^3, & 0;\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$不是(X,Y)的联合密度函数,所以 X 与 Y 不独立.

比较(1),(2),我们看到虽然二者的联合密度函数均为变量可分离,但结论却截然不同.这是由于(1)中 X,Y 的取值彼此不受制约,而(2)中却彼此约束.

6. 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布矩阵为:

$X \backslash Y$	1	2	3
-1	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	b

问 a,b 为何值时,X,Y 独立?

解 X,Y 独立$\Leftrightarrow$对$\forall\, i,j,p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$于是 $p_{ij}\cdot p_{lk}=p_{ik}\cdot p_{lj}$

为了方便,p_{ij}中的 i,j,我们用 x_i,y_j 即 X,Y 的取值代替.

于是

$$a=p_{-12}=\frac{p_{-11}}{p_{21}}\cdot p_{22}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{9};$$

$$b=p_{23}=\frac{p_{21}}{p_{-11}}\cdot p_{-13}=\frac{1}{9}.$$

自然我们也可以利用 $P(X=X_i,Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$及 $\sum_{i,j}P(X=x_i,Y=y_j)=1$,解出 a,b,但较繁琐.

7. 设 X,Y 为独立且服从相同分布的连续型随机变量,求 $P(X\leqslant Y)$.

解 设 X,Y 的密度函数分别为$f_X(x),f_Y(y)$.又由独立性知:(X,Y)的联合密度函数为:

$g(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x)\cdot f(y)$.

其中 $f(x)$为 X,Y 共同的分布密度.

于是

$$\begin{aligned}P(X\leqslant Y)&=\iint_{x\leqslant y} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x\leqslant y} f(x)\cdot f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{y} f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)F(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}F(y)=\frac{1}{2}[F(y)]^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中 $F(y)$ 为 $f(y)$ 对应的分布函数．

8. 若 $f_1(x),f_2(x)$ 是对应于分布函数 $F_1(x),F_2(x)$ 的概率密度函数，证明对于一切 α $(-1<\alpha<1)$ 下列函数为概率密度函数，且具有边缘密度函数 $f_1(x),f_2(x)$：

$f_\alpha(x_1,x_2)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\{1+\alpha[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]\}$.

证明 由于 $F_1(x_1),F_2(x_2)$ 为分布函数，则

$-1\leqslant 2F_i(x_i)-1\leqslant 1;\qquad \forall x_i\in\mathbf{R}, i=1,2.$

$\therefore -1\leqslant[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]\leqslant 1.$

又 $-1<\alpha<1$，故

$-1<\alpha[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]<1,$

$1+\alpha[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]>0.$

而 $f_i(x_i),i=1,2$ 为密度函数，于是有

$f_i(x_i)\geqslant 0,\ \forall x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,$

$\therefore f_\alpha(x_1,x_2)\geqslant 0.$

下面证 $f_\alpha(x_1,x_2)$ 满足本章(3.11)式．

由题知，我们只需证

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)f_2(x_2)[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=0.$$

而上式右边为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)[2F_1(x_1)-1]\mathrm{d}x_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)[2F_2(x_2)-1]\mathrm{d}x_2,$$

于是只需证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)[2F_1(x_1)-1]\mathrm{d}x_1=0$ 即可．

而
$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)[2F_1(x_1)-1]\mathrm{d}x_1\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)F_1(x_1)\mathrm{d}x_1-\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\mathrm{d}x_1\\&=2\times\frac{1}{2}-1=0.\end{aligned}$$

最后一个等式利用了本章典型例题 7 的结论：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$\therefore f_\alpha(x_1,x_2)$ 为概率密度函数．

$$\begin{aligned}f_{X_1}=(x_1)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\mathrm{d}x_2+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)f_2(x_2)[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1]\mathrm{d}x_2\\&=f_1(x_1)+\alpha f_1(x_1)[2F_1(x_1)-1]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)[2F_2(x_2)-1]\mathrm{d}x_2\\&=f_1(x_1)+\alpha f_1(x_1)[2F_1(x_1)-1]\cdot 0=f_1(x_1).\end{aligned}$$

这里利用了前面证明中所得到的结论：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_i)[2F_i(x_i)-1]\mathrm{d}x_i=0.$$

同理 $f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1=f_2(x_2)$，

于是对于一切 $-1<\alpha<1$，$f_\alpha(x_1,x_2)$ 有边缘密度函数 $f_1(x_1)$，$f_2(x_2)$.

9. 设 X,Y 为相互独立的具有相同参数 p 的几何分布，$P(X=n)=P(Y=n)=q^{n-1}p$，$n=1,2,\cdots q=1-p$.

求(1) $\xi=\max\{X,Y\}$ 的分布；

(2) (X,ξ) 的联合分布；

(3) 讨论 X 与 ξ 的独立性．

解 (1)**方法一**

注意到 $\{\xi=n\}=\{\xi<n+1\}-\{\xi<n\}$，且 $\{\xi<n\}\subset\{\xi<n+1\}$．而

$$\{\xi<n+1\}=\{X<n+1\}\cap\{Y<n+1\},$$

$$\begin{aligned}\therefore P(\xi=n)&=P(\xi<n+1)-P(\xi<n)\\&=P(X<n+1)\cdot P(Y<n+1)-P(X<n)\cdot P(Y<n)\\&=(\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}p)^2-(\sum_{i=1}^{n-1}q^{i-1}p)^2\\&=\left(\frac{1-q^n}{1-q}\cdot p\right)^2-\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\cdot p\right)^2\\&=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1}).\quad (n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

方法二

注意到
$$\{\xi=n\}=\{\max(X,Y)=n\}=\{[\bigcup_{i=1}^{n-1}(X=i)]\cap(Y=n)\}\cup\{(X=n)\cap[\bigcup_{i=1}^{n}(Y=i)]\}.$$

于是

$$\begin{aligned}P(\xi=n)&=P\{[\bigcup_{i=1}^{n-1}(X=i)]\cap(Y=n)\}+P\{(X=n)\cap[\bigcup_{i=1}^{n}(Y=i)]\}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}P(X=i)\cdot P(Y=n)+\sum_{i=1}^{n}P(X=n)\cdot P(Y=i)\\&=\sum_{i=1}^{n-1}q^{i-1}p\cdot q^{n-1}p+\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}p\cdot q^{n-1}p\\&=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1}).\qquad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

方法三

注意到 $\xi=\max\{X,Y\}=\begin{cases}X, & \text{当 } X\geqslant Y;\\ Y, & \text{当 } Y>X.\end{cases}$

所以

$$\begin{aligned}P(\xi=n)&=P[(X=n,\text{当 } X\geqslant Y\text{ 时})\cup(Y=n,\text{当 } X<Y\text{ 时})]\\&=P(X=n,Y\leqslant n)+P(Y=n,X<n)\\&=pq^{n-1}\sum_{i=1}^{n}pq^{i-1}+pq^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}pq^{i-1}=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1}).\\&\qquad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

(2)设 (X,ξ) 的分布列为 $p_{ij}=P(X=i,\xi=j)\quad(i,j=1,2,3,\cdots)$

当 $i>j$ 时,由 $\xi=\max\{X,Y\}$ 知:$\{X=i\}\cap\{\xi=j\}=\varnothing$, 于是 $p_{ij}=0$.

当 $i=j$ 时,$p_{ij}=P(X=j,\bigcup_{k=1}^{j}(Y=k))=\sum_{k=1}^{j}P(X=j,Y=k)$

$$=\sum_{k=1}^{j}P(X=j)\cdot P(Y=k)=pq^{j-1}\sum_{k=1}^{j}pq^{k-1}=pq^{j-1}(1-q^{j}).$$

当 $i<j$ 时,$p_{ij}=P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)=p^2q^{i+j-2}$.

(3)由上可见,$p_{ij}\neq p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$,从而 X 与 ξ 不独立.

注:本题三种解法的关键是将随机变量取值的不等式转化为一些事件的关系与运算,再利用第一章的概率计算公式即得.

10. 设 X,Y 独立,X 有概率密度 $f(x)$,而 Y 为离散型随机变量,$P(Y=y_j)=p_j,j=1,2,\cdots$证明随机变量 $X+Y$ 有概率密度函数 $h(x)$:

$$h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_if(x-y_i).$$

证明 以 $F(x)$ 记 X 的分布函数,计算 $X+Y$ 的分布函数.

由全概率公式:

$$P(X+Y\leqslant x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=y_i)P(X+Y\leqslant x\mid Y=y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=y_i)P(X\leqslant x-y_i\mid Y=y_i).$$

再由 X,Y 的独立性知:

$$P(X+Y\leqslant x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=y_i)\cdot P(X\leqslant x-y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p_iF(x-y_i).$$

两边对 x 求导得 $X+Y$ 的密度函数为:

$$h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_if(x-y_i).$$

11. 设随机变量 X,Y 独立,X 有概率密度 $f(x)$,Y 为离散型随机变量,其分布律为 $P(Y=a_i)=p_i,i=1,2,\cdots,p_i>0$. 证明:若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots$都不为 0,则 XY 有概率密度函数:

$$h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i|a_i|^{-1}f(x/a_i).$$

若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots$中有等于 0 的,则 XY 不存在密度函数.

证明 若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots$中有等于 0 的,不妨设 $a_1=0$,于是 $P(XY=0)\geqslant P(Y=0)=p_1>0$(由于$\{XY=0\}\supset\{Y=0\}$),故 XY 不可能是连续型随机变量,故不存在密度函数.

若 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots$中都不为 0,则同上题,以 $F(x)$ 记 $f(x)$ 对应的分布函数,由全概率公式及 X,Y 的独立性知:

$$P(XY\leqslant x)=\sum_{i=1}^{\infty}p(Y=a_i)P(XY\leqslant x\mid Y=a_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(Y=a_i)P(a_iX\leqslant x\mid Y=a_i)$$

$$= \sum_{a_i>0} p_i P\left(X \leqslant \frac{x}{a_i} \right) + \sum_{a_i<0} p_i p\left(X \geqslant \frac{x}{a_i} \right)$$

$$= \sum_{= a_i>0} p_i F\left(\frac{x}{a_i} \right) + \sum_{a_i<0} p_i (1 - F(x/a_i)).$$

两边对 x 求导得：

$$h(x) = \sum_{a_i>0} p_i a_i^{-1} f\left(\frac{x}{a_i} \right) + \sum_{a_i<0} p_i(-a_i)^{-1} f\left(\frac{x}{a_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} = p_i |a_i|^{-1} f\left(\frac{x}{a_i} \right).$$

12. 设 X, Y 独立同分布于 $N(0,1)$，以 $f(x,y)$ 表示 (X,Y) 的联合密度函数，证明函数

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) + \frac{xy}{100}, & \text{当 } x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ 时}; \\ f(x,y), & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

是二维概率密度函数，且边缘密度为 $N(0,1)$，$N(0,1)$，但 $g(x,y)$ 不是二维正态密度函数．

证明 完全类似于本章问题与思考中 6 中的例子．

13. 设 X, Y 相互独立，其概率密度分别为：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} y e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

证明：$Z = X \cdot Y \sim N(0,1)$. （[1]习题 3.42）

证明 由[1]中习题 3.40 知，$Z = X \cdot Y$ 的密度函数为：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot f_X\left(\frac{z}{y} \right) \left| \frac{1}{y} \right| dy$$

$$= \int_{|z|}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{1 - \left(\frac{z}{y} \right)^2}} \cdot \left| \frac{1}{y} \right| dy = \int_{|z|}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{y}{\pi\sqrt{y^2 - z^2}} dy.$$

作变量替换 $t^2 = y^2 - z^2$，则上式化为：

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2+z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\pi t} t\,dt = e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

即 $Z = X \cdot Y \sim N(0,1)$.

这里我们利用了

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

14. 接连不断地掷一枚匀质的骰子，直到出现小于 5 点为止，记 X 为最后一次掷出的点数，Y 为掷骰子的次数，试求

(1)(X,Y) 的联合分布律．

(2)X, Y 的边缘分布律． （[1]习题 3.2）

解 (1)由题意知 Y 服从几何分布，且

$$P(Y=j) = \left(\frac{1}{3} \right)^{j-1} \cdot \frac{2}{3}. \qquad j = 1, 2, \cdots$$

事件 $(X = i \mid Y = j)$ 表示在第 j 次投出了小于 5 的点的条件下，掷出了 i 点．$(i = 1,2,3,4)$

于是 $P(X=i\mid Y=j)=\frac{1}{4}$.

$\therefore P(X=i,Y=j)=P(X=i\mid Y=j)\cdot P(Y=j)$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

其中 $i=1,2,3,4,\quad j=1,2,\cdots$

(2) $P(X=i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\frac{1}{4},\quad i=1,2,3,4$

$P(Y=j)=\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}\cdot\frac{2}{3},\quad j=1,2,\cdots$

15. 设 X 的概率密度为 $f(x)$，又 $Y=X^2$，求 (X,Y) 的联合分布函数．问 (X,Y) 是二维连续型随机变量吗？

解 设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，则

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$$
$$=P(X\leqslant x,X^2\leqslant y)$$
$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(t)\mathrm{d}t, & \text{当 } 0<\sqrt{y}\leqslant x \text{ 时；}\\ \int_{-\sqrt{y}}^{x}f(t)\mathrm{d}t, & \text{当} \sqrt{y}>x\geqslant-\sqrt{y},y>0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } y<0 \text{ 或 } x<-\sqrt{y} \text{ 时．}\end{cases}$$

(X,Y) 不是二维连续型随机变量．用反证法证明．设 (X,Y) 存在联合密度函数 $f_1(x,y)$，则在 $f_1(x,y)$ 的连续点上有

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f_1(x,y),$$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

但由上可知：$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\equiv0$. 故 (X,Y) 不是二维连续型随机变量．

16. 设随机变量 $X\sim U[0,1]$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的分布律为：

$P(Y_i=0)=P(Y_i=1)=\frac{1}{2},\quad i=1,2,\cdots,n$. 且 $X,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立．求 $\frac{X}{2^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{2^i}$ 的分布．

解 首先考虑 $\frac{X}{2}+\frac{Y_n}{2}$ 的分布．

由全概率公式得：

$$P\left(\frac{Z}{2}+\frac{Y_n}{2}\leqslant x\right)$$
$$=P\left(\frac{X}{2}+\frac{Y_n}{2}\leqslant x\mid Y_n=0\right)\cdot P(Y_n=0)+P\left(\frac{X}{2}+\frac{Y_n}{2}\leqslant x\mid Y_n=1\right)\cdot P(Y_n=1)$$
$$=P\left(\frac{X}{2}\leqslant X\right)\cdot P(Y_n=0)+P\left(\frac{X}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\right)\cdot P(Y_n=1)$$
$$=P(X\leqslant 2x)\cdot P(Y_n=0)+P(X\leqslant 2x-1)\cdot P(Y_n=1).$$

当 $x\leqslant 0$ 时，上式 $=0$；

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，上式 $=2x\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=x$；

当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，上式 $=1\cdot\frac{1}{2}+(2x-1)\cdot\frac{1}{2}=x$；

当 $x>1$ 时，上式 $=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1$；

故 $\frac{X}{2}+\frac{Y_n}{2}$ 的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

即 $\frac{Z}{2}+\frac{Y_n}{2}\sim U[0,1]$.

于是 $\left(\frac{X}{2}+\frac{Y_n}{2}\right)\Big/2+\frac{Y_{n-1}}{2}\sim U[0,1]$.

利用递推法可得：$\frac{X}{2^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{2^i}\sim U[0,1]$.

17. 设 X,Y 相互独立且都具有参数为 λ 的指数分布，求 $Z=\frac{X}{X+Y}$ 的概率密度．

解 由于 X,Y 取非负值，故 $Z=\frac{X}{X+Y}$ 的取值范围为 $[0,1]$. 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则有：

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，由分布函数法得：

$$F_Z(z)=P\left(\frac{X}{X+Y}\leqslant z\right)=\iint\limits_{\substack{\frac{x}{x+y}\leqslant z\\ x>0\\ y>0}}\lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0\\ (1-z)x\leqslant zy}}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{z}{1-z}y}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\lambda e^{-\lambda y}-\lambda e^{-\lambda\cdot\frac{1}{1-z}y}\right)\mathrm{d}y=1-(1-z)=z.$$

即 $Z=\frac{X}{X+Y}\sim U[0,1]$.

18. 设 (X,Y) 的联合分布密度为：

$$f(x,y)=Ce^{-(x+1)^2-|y|}\qquad -\infty<x,y<+\infty.$$

(1)求常数 C；

(2)求 X,Y 的边缘密度函数；

(3)问 X,Y 是否独立；

(4)求 $Z=X-Y$ 的概率密度．

解 (1)$f(x,y)=Ce^{-(x+1)^2-|y|}$

$$=C\cdot 2\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2\cdot(\sqrt{\frac{1}{2}})^2}}\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}.$$

由密度函数的性质知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

即 $C\cdot 2\sqrt{\pi}=1$,

$$\therefore C=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

(2) X,Y 的边缘密度函数 .

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+1)^2}\sim N\left(-1,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right);$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{-|y|},\qquad y\in(-\infty,+\infty).$$

(3)在整个平面上，$f_X(x)\cdot f_Y(y)$恰好是(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)$，于是 X,Y 是相互独立的 .

(4)用分布函数法 .

$$P(Z\leqslant z)=P(X-Y\leqslant z)=\iint\limits_{x-y\leqslant z}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-(x+1)^2}e^{-|y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|y|}\left(\int_{-\infty}^{z+y}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+1)^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|y|}\Phi\left(\frac{z+y+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{d}y.$$

两边对 z 求导，得到：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|y|}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{2}(z+y+1))^2/2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|y|}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(z+y+1)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-(y+z+\frac{3}{2})^2}\mathrm{d}y\right)\cdot e^{z+\frac{5}{4}}$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-(y+z+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}y\right)\cdot e^{-z-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{z+\frac{5}{4}}\left[\Phi\left(\frac{+\infty+z+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{0+z+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}e^{-z-\frac{3}{4}}\left[\Phi\left(\frac{0+z+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty+z+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-z-\frac{3}{4}}\Phi(\sqrt{2}(z+\frac{1}{2}))+\frac{1}{2}e^{z+\frac{5}{4}}\left[1-\Phi\left(\sqrt{2}\left(z+\frac{3}{2}\right)\right)\right].$$

$\therefore Z$ 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{-z-\frac{3}{4}}\Phi\left(\sqrt{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{1}{2}e^{z+\frac{5}{4}}\Phi\left(\sqrt{2}\left(z+\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}e^{z+\frac{5}{4}}. \qquad (-\infty < z < +\infty)$$

19. 设 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases} \qquad \lambda>0, \text{常数}$$

Y 在 $(0,X)$ 上服从均匀分布．试求：

(1) Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(2) (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；

(3) Y 的概率密度．　　（见[1]习题3.18）

解 (1)由已知，Y 在 $(0,X)$ 上服从均匀分布，故所求的 Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)由条件密度与联合密度函数之间的关系，我们有：

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)$$

$$=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, & 0<y<x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\mathrm{d}x=0$，

当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{y}^{+\infty}\lambda^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda e^{-\lambda y},$$

即 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

20. 已知 $X\sim N(0,1)$，令 $Y_k=\begin{cases}1, & X\leqslant k;\\ 0, & X>k,\end{cases}$ $\quad k=1,2.$

(1)分别求 Y_1,Y_2 的分布律．

(2)求 (Y_1,Y_2) 的联合分布律．

解 (1) $P(Y_1=1)=P(X\leqslant 1)=\Phi(1)$

$P(Y_1=0)=P(X>1)=1-\Phi(1)$

同理 $P(Y_2=1)=\Phi(2)$

$P(Y_2=0)=1-\Phi(2)$

(2) $P(Y_1=1,Y_2=1)=P(X\leqslant 1,X\leqslant 2)$

$=P(X\leqslant 1)=\Phi(1)$；

$P(Y_1=0,Y_2=1)=P(X>1,X\leqslant 2)$

$=P(1<X\leqslant 2)=\Phi(2)-\Phi(1)$；

$P(Y_1=1,Y_2=0)=P(X\leqslant 1,X>2)$

$=P(\varnothing)=0$；

$$P(Y_1=0, Y_2=0)=P(X>1, X>2)$$
$$=P(X>2)=1-\Phi(2).$$

21. 设 X, Y 为独立且都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，求 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=\frac{X}{Y}$ 的联合分布密度函数．

解 对于 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$ 作变换 $u=x+y, v=\frac{x}{y}$，反解之 $x=\frac{uv}{1+v}, y=\frac{u}{1+v}$．于是

$$J^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{-(x+y)}{y^2}=-\frac{(1+v)^2}{u},$$

因此 $|J|=\frac{u}{(1+v)^2}, u\geqslant 0$.

$\therefore(\xi,\eta)$的联合分布密度函数为：

$$g(u,v)=f\left(\frac{uv}{1+v}\right)f\left(\frac{u}{1+v}\right)|J|$$
$$=e^{-u}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}$$
$$=ue^{-u}\cdot\frac{1}{(1+v)^2}. \qquad (u\geqslant 0)$$

其中 $f(x)$ 为参数 $\lambda=1$ 的指数分布的密度函数．

所求(ξ,η)的密度函数为：

$$g(u,v)=\begin{cases}ue^{-u}\cdot\frac{1}{(1+v)^2}, & u\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

五、习题与解答

习 题

1. 在箱中装有12只球，其中2只黑球．现从箱中随机抽取两次，每次抽取一球，用 X, Y 分别表示第一次与第二次取得的黑球数，试分别对有放回抽取与无放回抽取两种情况：

(1)写出(X,Y)的联合分布列；

(2)判断 X, Y 是否独立．

2. 设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{C}{(1+x^2)(1+y^2)}, \qquad -\infty<x<+\infty;\ -\infty<y<+\infty.$$

求(1)常数 C；

(2)$P(0<X<1, 0\leqslant Y\leqslant 1)$；

(3)$f_X(x), f_Y(y)$；

(4)X, Y 是否独立．

3. 设某种部件的寿命(单位：小时)$T\sim N(190, 20^2)$，某个系统独立使用了4个这样部

件，若 4 个都正常工作，则系统正常工作，求该系统至少能正常工作 180 小时的概率．

4. 试验证 $f(x,y)=ke^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ 为密度函数的充要条件为 $a>0,c>0,b^2-ac<0$，$k=\frac{1}{\pi}\sqrt{ac-b^2}$．

5. 若 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho$ 的二元正态分布，以 $D(\lambda)$ 记以下椭圆的内部

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\lambda^2.$$

求 $P((X,Y)\in D(\lambda))$．

6. 设 X 与 Y 为独立的随机变量，均服从 Poisson 分布，参数为 λ_1,λ_2，证明：

(1) $X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$；

(2) $P(X=k\mid X+Y=n)=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$．

7. 设 X 服从 Poisson 分布，参数 λ．求

(1) $Y=aX+b$；　（a,b 为已知常数，且 $a\neq0$）；

(2) $Z=X^2$；

的分布．

8. 设 X,Y 相互独立，且密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}5, & x\in(0,0.2);\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y\geqslant0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $P(X\geqslant Y)$．

9. 设随机变量 X 满足 $P(X=a)=1$，a 为一常数，Y 为任一随机变量，分布函数为 $F_Y(y)$，证明：X,Y 相互独立．

10. 设 X,Y 相互独立，均服从标准正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=X/Y$ 的密度函数．

11. 设 X,Y 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求使方程 $t^2+2XYt+Y=0$ 有实根的概率．

12. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim U[0,1]$，Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}y, & 0<y\leqslant1;\\ 2-y, & 1<y\leqslant2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的分布密度．

13. 设 Y 为只取正值的随机变量，且 $\ln Y$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 Y 的概率密度函数（Y 的分布称为对数正态分布）．

14. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}120y(x-y)(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $Z=Y/\sqrt{X}$ 的概率密度．

15. 设二维随机变量 (X,Y) 服从单位圆内 $x^2+y^2\leqslant1$ 的均匀分布，其联合密度为 $f(x,$

$y)$,求 $f_{Y|X}(y|x)$,$f_{X|Y}(x|y)$.

16. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x^2-y^2)e^{-x}, & 0\leqslant x<\infty,|y|\leqslant x;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求 C 及$f_X(x)$,$f_Y(y)$.

17. 设随机变量 X,Y 独立,且有

$P(X=1)=P(Y=1)=p>0$;

$P(X=0)=P(Y=0)=1-p>0$.

定义随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y 为偶数;\\ 0, & X+Y 为奇数.\end{cases}$$

求 p 取何值时,X,Z 独立?

18. 设(X_1,X_2)的联合密度函数为 $f(x_1,x_2)$,

令 $Y_1=aX_1+bX_2$;

$Y_2=cX_1+dX_2$.

其中 a,b,c,d 均为常数且 $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$,求$(Y_1,Y_2)$的联合密度函数 $g(y_1,y_2)$.

答案与提示

1. 有放回:

X \ Y	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

此时,X,Y 独立

无放回:

X \ Y	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

此时,X,Y 不独立

2. (1)$C=\frac{1}{\pi^2}$ (2)$\frac{1}{16}$ (3)$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$

(4)X,Y 相互独立

3. 0.229

4. 提示:由本章(3.10)和(3.11)式,并利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Ax^2+2Bx+C)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \cdot e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$$

5. 参阅王梓坤:《概率论基础及其应用》(第二版),北京师范大学出版社,P76 ~ P77.

$P((X,Y) \in D(\lambda)) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2(1-\rho^2)}}$

6. (略).

7. $P(Y = ak + b) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k = 0,1,2,\cdots$

$P(Z = k^2) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\cdots$

8. e^{-1}

10. $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$

11. $\frac{1}{2}$

12.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leqslant z < 1; \\ -z^2 + 3z - \frac{3}{2}, & 1 \leqslant z < 2; \\ \frac{z^2}{2} + 3z + \frac{9}{2}, & 2 \leqslant z < 3; \\ 0, & z \geqslant 3. \end{cases}$$

13. 提示:

记 $F_Y(x) = P(Y \leqslant x)$,

当 $x \leqslant 0$ 时,$F_Y(x) = 0$,

当 $x > 0$ 时,注意

$$\{Y \leqslant x\} = \{\ln Y \leqslant \ln x\} = \left\{\frac{\ln Y - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right\}$$

故

$F_Y(x) = \Phi((\ln x - \mu)/\sigma)$,

两边对 x 求导即可得 $f_Y(x)$

14. $f_Z(x) = \begin{cases} 10x - \frac{96}{7}x^2 + 8x^7 - \frac{30}{8}x^9, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

15. 当 $|x| < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & |y| < \sqrt{1-x^2}; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $|y| < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x| < \sqrt{1-y^2}; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

16. $C=\frac{1}{8}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3e^{-x}, & 0<x<+\infty;\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{4}(|y|+1)e^{-|y|}$$

17. $p=\frac{1}{2}$

18. $g(y_1,y_2)=\dfrac{f\left(\frac{d}{\Delta}y_1-\frac{b}{\Delta}y_2,-\frac{c}{\Delta}y_1+\frac{a}{\Delta}y_2\right)}{|ad-bc|}$

第四章　随机变量的数字特征

一、基本要求

①理解数学期望、方差的概念，掌握它们的性质与计算．

②会计算随机变量函数的数学期望．

③熟记二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差．

④了解协方差、相关系数和矩的概念，掌握它们的性质与计算．

二、内容提要

1．数学期望的定义

①设离散型随机变量 X 的分布律为 $p_i=P\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$

若 $\sum\limits_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称它为 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_i x_i p_i. \tag{4.1}$$

此时，称 X 的数学期望存在，或称 X 有有限的数学期望．

若 $\sum\limits_i |x_i| p_i=+\infty$，则称 X 的数学期望不存在．

②设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，

若 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称它为 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

此时，称 X 的数学期望存在，或称 X 有有限的数学期望．

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\mathrm{d}x=+\infty$，则称 X 的数学期望不存在．

从上述定义可知，随机变量的数学期望若存在，则它是一个实数．

当 X 服从某分布时，也称其分布的数学期望为 $E(X)$．

2．数学期望的性质

①若 C 为常数，则 $E(C)=C$． (4.3)

②若 C 为常数，随机变量 X 的数学期望存在，则 CX 的数学期望存在，且

$$E(CX)=CE(X). \tag{4.4}$$

③若二维随机变量 (X,Y) 的两个分量 X、Y 的数学期望都存在，则 $X+Y$ 的数学期望存在，且

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y). \tag{4.5}$$

推论　若 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的每个分量的数学期望都存在,则 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的数学期望存在,且

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i). \tag{4.6}$$

④若 X、Y 相互独立,它们的数学期望都存在,则 XY 的数学期望存在,且

$$E(XY)=E(X)E(Y). \tag{4.7}$$

推论　若 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 相互独立,它们的数学期望都存在,则 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ 的数学期望存在,且

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i). \tag{4.8}$$

⑤若 X 取非负值,$E(X)$存在,则

$$E(X)\geqslant 0. \tag{4.9}$$

推论　若 $X\leqslant Y$,$E(X)$、$E(Y)$都存在,则

$$E(X)\leqslant E(Y). \tag{4.10}$$

特别地,若 $a\leqslant X\leqslant b$(a、b 为常数),则 $E(X)$存在,且

$$a\leqslant E(X)\leqslant b. \tag{4.11}$$

3. 随机变量函数的数学期望

①设离散型随机变量 X 的分布律为 $p_i=P\{X=x_i\}$, $i=1,2,\cdots$, $\varphi(X)$为 X 的函数. 若 $\sum_i \varphi(x_i)p_i$ 绝对收敛,则可以证明 $\varphi(X)$的数学期望存在,记为 $E[\varphi(X)]$,并且

$$E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i)p_i. \tag{4.12}$$

此时,也称 $\varphi(x)$有有限的数学期望.

②设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$,$\varphi(X)$是 X 的函数,且 $\varphi(X)$也是连续型随机变量. 若 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则可以证明 $\varphi(X)$的数学期望存在,记为 $E[\varphi(X)]$,并且

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.13}$$

此时,也称 $\varphi(X)$有有限的数学期望.

③设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为 $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, $i,j=1$、2、$\cdots$, $Z=\varphi(X,Y)$为(X,Y)的函数. 若 $\sum_{i,j}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛,则可以证明 $Z=\varphi(X,Y)$的数学期望存在,记为 $E(Z)$或 $E[\varphi(X,Y)]$,并且

$$E(Z)=E[\varphi(X,Y)] = \sum_{i,j}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}. \tag{4.14}$$

此时,也称 $\varphi(X,Y)$有有限的数学期望.

④设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$, $Z=\varphi(X,Y)$为(X,Y)的函数,且 $Z=\varphi(X,Y)$为连续型随机变量. 若 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛,则可以证

明 $Z=\varphi(X,Y)$的数学期望存在,记为 $E(Z)$或 $E[\varphi(X,Y)]$,并且

$$E(Z)=E[\varphi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.15}$$

此时,也称 $\varphi(X,Y)$有有限的数学期望.

4. 方差的定义与计算公式

①设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$存在,若 $E[X-E(X)]^2$ 存在,则称它为 X 的方差,记为 $D(X)$或 $\mathrm{Var}(X)$,即

$$D(X)=E[X-E(X)]^2. \tag{4.16}$$

此时,称 X 的方差存在.

若 $E[X-E(X)]^2=+\infty$,则称 X 的方差不存在.

称 $D(X)$的算术平方根$\sqrt{D(X)}$为 X 的均方差或标准差,记为 $\sigma(X)$,即

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)},$$

根据数学期望的性质⑤知,若随机变量 X 的方差存在,则它是一个非负实数.

当 X 服从某一分布时,也称某分布的方差为 $D(X)$.

②设离散型随机变量 X 的分布律为$p_i=P\{X=x_i\}$, $i=1,2,\cdots$,其方差存在,根据(4.12)式则有

$$D(X)=\sum_i(x_i-E(X))^2p_i. \tag{4.17}$$

③设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$,其方差存在,根据(4.13)式则有

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.18}$$

④在计算 $D(X)$时,除用(4.17)、(4.18)式外,有时用下述(4.19)式较方便

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-E^2(X). \tag{4.19}$$

5. 方差的性质

①若 C 为常数,则 $D(C)=0$. (4.20)

②若 C 为常数,随机变量 X 的方差存在,则 CX 的方差存在,且

$$D(CX)=C^2D(X). \tag{4.21}$$

③若 X、Y 相互独立,它们的方差都存在,则 $X\pm Y$ 的方差存在,且

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \tag{4.22}$$

推论　若 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 相互独立,它们的方差都存在,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的方差存在,且

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i). \tag{4.23}$$

④若 X 的方差存在,对任意的常数 $C\neq E(X)$,则

$$D(X)=E[X-E(X)]^2<E(X-C)^2. \tag{4.24}$$

即函数 $g(C)=E(X-C)^2$ 在 $C=E(X)$处取唯一的最小值.

⑤若 $D(X)$存在,则 $D(X)=0$ 的充要条件是

$$P\{X=E(X)\}=1. \tag{4.25}$$

6. 协方差、相关系数的定义与计算公式

①设二维随机变量(X,Y),若$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$存在,则称它为X与Y的协方差,记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$,即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]. \tag{4.26}$$

此时,称X与Y的协方差存在.

若$E|[X-E(X))(Y-E(Y))]|=+\infty$,则称$X$与$Y$的协方差不存在.

②设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$,$i,j=1,2,\cdots$,且$\mathrm{Cov}(X,Y)$存在,根据(4.14)式则有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i,j}(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}. \tag{4.27}$$

③设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,且$\mathrm{Cov}(X,Y)$存在,根据(4.15)式则有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.28}$$

④在计算$\mathrm{Cov}(X,Y)$时,除用(4.27)、(4.28)式外,有时用下述(4.29)式较方便.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y). \tag{4.29}$$

⑤设二维随机变量(X,Y),若$D(X)$、$D(Y)$都存在,且都大于零,则称$\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$为$X$、$Y$的相关系数,记为$\rho_{XY}$,即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \tag{4.30}$$

若$D(X)$、$D(Y)$至少有一个不存在,或者$D(X)$、$D(Y)$都存在,但是它们至少有一个为零,则称X、Y的相关系数不存在.

当$\rho_{XY}=0$时,称X、Y不相关.

7. 协方差、相关系数的性质

①若X、Y独立且$\mathrm{Cov}(X,Y)$存在,则$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

若X、Y独立且ρ_{XY}存在,则$\rho_{XY}=0$.

②若$D(X)$、$D(Y)$存在,则

$$E(XY)=E(X)E(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{4.31}$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{4.32}$$

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}. \tag{4.33}$$

③若下述各式中的协方差都存在,则

$$P\{Y = aX + b\} = 1. \tag{4.39}$$

8. 矩

设二维随机变量(X,Y)，k、l为非负整数．

若$E(X^k)$存在，则称它为X的k阶原点矩，简称X的k阶矩，记为μ_k，即$\mu_k = E(X^k)$.

若$E[X - E(X)]^k$存在，则称它为X的k阶中心矩，记为σ_k，即$\sigma_k = E[X - E(X)]^k$.

若$E(X^kY^l)$存在，则称它为X和Y的(k,l)阶混合矩，记为μ_{kl}，即$\mu_{kl} = E(X^kY^l)$.

若$E[(X - E(X))^k(Y - E(Y))^l]$存在，则称它为$X$和$Y$的$(k,l)$阶混合中心矩，记为$\sigma_{kl}$，即

$$\sigma_{kl} = E[(X - E(X))^k(Y - E(Y))^l].$$

显然，数学期望$E(X)$是X的一阶矩，方差$D(X)$是X的二阶中心矩，协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$是X和Y的$(1,1)$阶混合中心矩．

三、问题与思考

1. 离散型随机变量X的数学期望的定义中为什么要求级数$\sum\limits_i x_i p_i$绝对收敛?

答 离散型随机变量X(其分布律为$p_i = p\{X = X_i\}, i = 1,2,\cdots$)的数学期望若存在，则它是一串数$\{x_i\}$的加权平均$\sum\limits_i x_i p_i$. 这个加权平均值应该是唯一的，即改变这一串数中的某些数的求和次序时，其加权平均值不变．在数学上，这就等价于要求级数$\sum\limits_i x_i p_i$绝对收敛(见《高等教学》下册，刘颖主编，北京理工大学出版社，1991年，P293，性质1).

2. 连续型随机变量X的数学期望的定义中为什么要求积分$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛?

答 连续型随机变量的数学期望是通过离散化的方法，由离散型的随机变量的数学期望的极限而引入的．离散型随机变量的数学期望存在，要求级数绝对收敛，这就等价于，连续型随机变量数学期望存在，要求积分$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛．

3. 数学期望不存在的例

(1)离散型随机变量X_1的分布律为

$$P\left\{X_1 = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{k}\right\} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,\cdots$$

(2)连续型随机变量X_2的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

称X_2为服从柯西(Cauchy)分布或自由度为1的t分布．

试验证$E(X_1)$、$E(X_2)$不存在．

解 (1) $\because \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k \cdot \frac{2^k}{k} \cdot \frac{1}{2^k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty,$

$\therefore E(X_1)$不存在．虽然

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k}=-\ln 2.$$

（见《高等教学》下册．刘颖主编．北京理工大学出版社，1991 年，P308，例 10.4.5）

$$(2)\because\int_{-\infty}^{\infty}\left|x\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right|\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{\infty}=+\infty,\therefore E(X_2)\text{不存在}.$$

4. 数学期望存在、方差不存在的例

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=(2+x^2)^{-\frac{3}{2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

称 X 服从自由度为 2 的 t 分布．试验证 $E(X)$存在，$D(X)$不存在．

解 当 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时，都有 $x(2+x^2)^{-\frac{3}{2}}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)^*$，$x^2(2+x^2)^{-\frac{3}{2}}=O\left(\frac{1}{x}\right)$．由广义积分的比较判别法知，$\int_{-\infty}^{\infty}|x(2+x^2)^{-\frac{3}{2}}|\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_{-\infty}^{\infty}|x^2(2+x^2)^{-\frac{3}{2}}|\mathrm{d}x$ 发散．故 $E(X)$存在，$E(X^2)$不存在，从而 $D(X)$也不存在．

另外，易知 $E(X)=0$.

5. 随机变量 X、Y 相互独立，但 ρ_{XY}不存在的例．

设 X、Y 均服从自由度为 2 的 t 分布，且 X、Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，但 $D(X)$、$D(Y)$均不存在，所以ρ_{XY}不存在，更谈不上$\rho_{XY}=0$了．

这个例子告诉我们：(1)X、Y 相互独立，推不出 X、Y 不相关；(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，也推不出 X、Y 不相关．

6. 随机变量 X、Y 独立，但 $\mathrm{Cov}(X,Y)$不存在的例

设 $X=a$(常数)，Y 服从自由度为 1 的 t 分布，则 X、Y 相互独立，由于 $E(Y)$不存在，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)$也不存在．

这个例子告诉我们：X、Y 相互独立，但 $\mathrm{Cov}(X,Y)$可以不存在，更谈不上 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$了．

7.综合 5、6，得到如下结论：

(1)若 X、Y 相互独立，且 ρ_{XY}存在，则 $\rho_{XY}=0$，即 X、Y 不相关；

(2)若 X、Y 相互独立，且 $\mathrm{Cov}(X,Y)$存在，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

(3)若 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，且 ρ_{XY}存在，则 $\rho_{XY}=0$，即 X、Y 不相关．

四、典型例题

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=a\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{8}}+b\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

---

* 符号 $O(\alpha(x))$的含义是：$\lim\limits_{x\to a}\frac{O(\alpha(x))}{\alpha(x)}=c$，$0<|c|<+\infty$，其中 a 可为任意实数、$+\infty$或$-\infty$．

其中 a、b 为待定常数，且已知 $E(X)=\frac{3}{2}$.

试求常数 a、b 的值．

分析 一般而言，求两个未知数，应该有包括这两个未知数的两个方程．

现在，已知 $E(X)=\frac{3}{2}$，给出了包含 a、b 这两个未知常数的一个方程；另一个方程，由连续型随机变量的密度函数的性质：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$（即本书第二章的式(2.18)）给出．

在联立上述两个方程求解的过程中，我们实际上用到了随机变量分布的核的概念．

下面简单介绍一下这个概念．

设随机变量 X 的概率分布的 $f(x)$（对连续型随机变量 X，$f(x)$ 为其概率密度；对离散型随机变量 X，$f(x)$ 为其分布律），为了突出 $f(x)$ 中与自变量 x 有关的部分，将 $f(x)$ 表示为 $f(x)=Cg(x)$，其中 C 为常数，$g(x)$ 为与 x 有关的部分，则称 $g(x)$ 为 X 的分布 $f(x)$ 的核．

在此题中，$e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ 和 $e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 分别是正态分布 $N(1,2^2)$ 和 $N(2,1)$ 的核．

解
$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}\mathrm{d}x+b\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=2a\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}2}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}\mathrm{d}x+b\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2\pi}(2a+b). \qquad \cdots\cdots(1)$$
$$\frac{3}{2}=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$
$$=2a\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}2}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}\mathrm{d}x+b\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=2\sqrt{2\pi}(a+b). \qquad \cdots\cdots(2)$$

联立(1)、(2)，得 $a=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$，$b=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$.

2. 每次打靶命中的概率都为 $p(0<p<1)$，不中的概率都为 $q=1-p$. 今向靶作独立重复射击，直到打中一次为止．记停止射击时已消耗的子弹数为 X，求 $E(X)$、$D(X)$.

解 X 服从参数为 p 的几何分布，其分布律为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=1,2,\cdots$

于是
$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1};$$
$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}.$$

由 $\sum_{k=0}^{\infty} q^k=\frac{1}{1-q}$，$|q|<1$，

利用幂级数在其收敛域内可逐项求导，可得
$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(q^k)'_q=(\sum_{k=0}^{\infty}q^k)'_q=\left(\frac{1}{1-q}\right)'_q=\frac{1}{(1-q)^2},$$
对上式两端乘以 q，再对 q 求导，可得
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

所以$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=\frac{1}{(1-q)^2}p=\frac{1}{p}$,

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=\frac{1+q}{(1-q)^3}p=\frac{1+q}{p^2},$$

从而有 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{q}{p^2}$.

3. 设 Y 的分布律为$P\{Y=k\}=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},k=0,1,\cdots$其中 $a>0$ 为已知常数,求$E(Y)$、$D(Y)$.

分析 将 Y 的分布律改写为 $P\{Y=k\}=q^kp,k=0,1,\cdots$,其中 $p=\frac{1}{1+a},q=\frac{a}{1+a}$. 这样仿上一题的作法,可求出 $E(Y)$、$D(Y)$来.

现在介绍此题的另一解法. 观察改写后的 Y 的分布律与服从参数为$p=\frac{1}{1+a}$的几何分布 X 的分布律 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=1,2,\cdots$,可见 Y 所取的可能值比 X 多一个 0. 于是,$Y=X-1$. 这样,利用数学期望、方差的性质和上一题的结果,易求出 $E(Y)$、$D(Y)$.

解 引入参数为 p 的几何分布的随机变量 X,其分布律为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=1,2,\cdots$,其中 $p=\frac{1}{1+a},q=\frac{a}{1+a}$.

由上一题的结果知:

$$E(X)=\frac{1}{p}=1+a,D(X)=\frac{q}{p^2}=a(1+a),$$

又易见:$Y=X-1$,于是

$$E(Y)=E(X-1)=E(X)-1=a,$$
$$D(Y)=D(X-1)=D(X)=a(1+a).$$

4. 袋中有 N 只球,其中白球数为随机变量 X,且 $E(X)=n$. 试求:从该袋中任取一球是白球的概率.

分析 此题是求一个事件的概率,似乎不好下手. 但是,设出 X 的分布律是解决此题的关键一步,也是很自然的一步. 因为只有这样,$E(X)=n$ 这个条件才能被利用. 然后,用全概率公式来求这个事件的概率就是顺理成章的事了.

解 设 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p_k\geqslant 0,k=0,1,\cdots,N$$

依题意知,$E(X)=\sum_{k=0}^{N}kp_k=n$

令 A:从袋中任取一球是白球,

$B_k=\{X=k\},k=0,1,\cdots,N$

则 B_0、B_1、$\cdots$、B_N 为一完备事件组*,又

$$P(B_k)=P\{X=k\}=p_k,P(A|B_k)=\frac{k}{N},$$

由全概率公式,得

* 若对某个 k 有 $P(B_k)=0$,在全概率公式中将不出现 $P(B_k)P(A|B_k)$这一项.

$$P(A)=\sum_{k=0}^{N}P(B_k)P(A\mid B_k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}kp_k=\frac{n}{N}.$$

5. 设 $X\sim B(n,p)$，令

$$Y=\begin{cases}1, & X\text{ 取偶数(包括零)};\\ 0, & X\text{ 取奇数}.\end{cases}$$

试求 $E(Y)$、$D(Y)$.

分析 此题的关键是求 X 取偶数的概率．

我们给出两个解法．下面介绍这两个解法的思路．

解法 1 的思路是：把 X 取偶数的概率与 X 取奇数的概率联系起来求解．

具体的思考过程如下：

令 $p_n=P\{X\text{ 取偶数}\}$，　$q_n=P\{X\text{ 取奇数}\}$.

显然，$p_n+q_n=1$

如果能再找到一个 p_n 与 q_n 的一次方程就能求出 p_n 来．

利用二项分布的特点，试计算 $p_n-q_n=?$

解法 2 的思路是：X 取偶数的概率即 n 重伯努利试验中有偶数次成功的概率，将它与 n 重伯努利试验的前 $(n-1)$ 次试验（这是一个 $(n-1)$ 重伯努利试验）中有偶数次成功的概率联系起来求解．用解法 1 的记号，解法 2 的思路是把 p_n 与 p_{n-1} 联系起来求解．

具体的思考过程如下：

利用全概率公式建立一个 p_n 与 p_{n-1} 之间的关系式*，再利用递推的方法，可求出 p_n 来．

解　法 1　令

$$p_n=P\{X\text{ 取偶数}\}=P\{X=0\text{ 或 }X=2\text{ 或}\cdots X=2\left[\frac{n}{2}\right]\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}P\{X=2k\}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}p^{2k}(1-p)^{n-2k};$$

$$q_n=P\{X\text{ 取奇数}\}=P\{X=1\text{ 或 }X=3\text{ 或}\cdots X=2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}P\{X=2k-1\}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_n^{2k-1}p^{2k-1}(1-p)^{n-(2k-1)};$$

显然有　$p_n+q_n=1$.

又

$$p_n-q_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}p^{2k}(1-p)^{n-2k}-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_n^{2k-1}p^{2k-1}(1-p)^{n-(2k-1)}$$
$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}(-p)^{2k}(1-p)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}C_n^{2k}(-p)^{2k-1}(1-p)^{n-(2k-1)}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}C_n^{l}(-p)^{l}(1-p)^{n-l}=(1-2p)^n.$$

将上述两式联立得

$$p_n=P\{X\text{ 取偶数}\}=\frac{1+(1-2p)^n}{2}.$$

---

* 这是一个一阶差分方程．

又 Y 是参数为 p_n 的 0－1 分布，于是

$$E(Y)=p_n=\frac{1+(1-2p)^n}{2}$$

$$D(Y)=p_nq_n=\frac{1-(1-2p)^{2n}}{4}.$$

解法 2 在 n 重伯努利试验中成功(即事件 A 发生)的次数就是此题中的随机变量 X.

设 B_i：i 重伯努利试验中有偶数次成功，$i=n-1,n$， $n=2,3,\cdots$

则 B_{n-1}、$\overline{B}_{n-1}$为一完备事件组

令 $$P(B_i)=p_i,\quad i=n-1,\quad n$$

我们约定，此解法中的 n 重伯努利试验是在$(n-1)$重伯努利试验的基础上，再增加一次伯努利试验(即第 n 次伯努利试验)而得到的．

设 A_n：第 n 次伯努利试验 A 发生，

则有 $P(A_n)=p$，$P(\overline{A}_n)=1-p$

根据上述约定和条件概率的概念，则有

$$P(B_n|B_{n-1})=P(\overline{A}_n)=1-p,P(B_n|\overline{B}_{n-1})=P(A_n)=p,$$

由全概率公式，得

$$P(B_n)=P(B_{n-1})P(B_n|B_{n-1})+P(\overline{B}_{n-1})P(B_n|\overline{B}_{n-1}),$$

即 $$p_n=p_{n-1}(1-p)+(1-p_{n-1})p=p+(1-2p)p_{n-1}.\quad n=2,3,\cdots\qquad (*)_1$$

由$(*)_1$式利用递推的方法，可得

$$\begin{aligned}p_n&=p+(1-2p)[p+(1-2p)p_{n-2}]=p+(1-2p)p+(1-2p)^2p_{n-2}\\&=p+(1-2p)p+(1-2p)^2p+(1-2p)^3p_{n-3}\\&\cdots\\&=p+(1-2p)p+(1-2p)^2p+(1-2p)^3p+\cdots+(1-2p)^{n-2}p+\\&+(1-2p)^{n-1}p_1.\end{aligned}\qquad (*)_2$$

而 p_1 即为一重伯努利试验中有偶数次(即零次)成功的概率，故 $p_1=1-p$.

将 $p_1=1-p$ 代入$(*)_2$式，利用等比级数有限项求和公式，并进行整理化简，则得

$$p_n=\frac{1+(1-2p)^n}{2},$$

又 Y 是参数为 p_n 的 0－1 分布，于是

$$E(Y)=p_n=\frac{1+(1-2p)^n}{2},$$

$$D(Y)=p_n(1-p_n)=\frac{1-(1-2p)^{2n}}{4}.$$

6. 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=2k\}=C\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 为已知常数，$C>0$ 为未知常数．

(1)求常数 C 的值；

(2)求 $E(X)$、$D(X)$.

解 由 $e^{\lambda}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$， $e^{-\lambda}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}$

得

$$\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!},\quad \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

(1) $1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=2k\}=Ce^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=C\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$

于是 $C=\frac{2}{1+e^{-2\lambda}}$;

$$(2)E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k)P\{X=2k\}=\sum_{k=1}^{\infty}(2k)C\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}$$

$$=C\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}=C\lambda e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}$$

$$=\lambda\frac{1-e^{-2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2;$$

又 $E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X).$

而 $E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{\infty}(2k)(2k-1)P\{X=2k\}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(2k)(2k-1)C\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}=\lambda^2Ce^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

$$=\lambda^2.$$

于是 $D(X)=E[X(X-1)]+E(X)-[E(X)]^2$

$$=\lambda^2+\lambda\frac{1-e^{-2\lambda}}{1+e^{-2\lambda}}-\lambda^2\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{1+e^{-2\lambda}}\right)^2$$

$$=\lambda^2\frac{4e^{-2\lambda}}{(1+e^{-2\lambda})^2}+\lambda\frac{1-e^{-2\lambda}}{1+e^{-2\lambda}}.$$

7. 已知 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$,且 X、Y 相互独立,试求 $E[\max(X,Y)]$.

解 **法1** X、Y 都服从 $N(0,1)$,它们的概率密分别为

$$f_X(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\varphi(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<+\infty$$

又 X、Y 相互独立,故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ -\infty<x,y<+\infty$$

根据二维随机变量的函数的数学期望的定理(见本章式(4.15)),于是

$$E[\max(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\max(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x\geq y}xf(x,y)dxdy+\iint\limits_{x<y}yf(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x\geq y}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint\limits_{x<y}y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\int_{y}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_{x}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

注意到e^{-x^2}是正态分布$N(0,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)$的核(关于随机变量分布的核的概念,可见本章典型例题1的分析),从而有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

综上所述,得

$$E[\max(X,Y)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

法2 对任意的两个实数x、y,都有下列恒等式

$$\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|).$$

用几何的方法解释上式是比较直观的:数轴上x、y这两点的中点为$\frac{1}{2}(x+y)$,x、y这两点间的距离的一半为$\frac{1}{2}|x-y|$,x、y这两点的中点与这两点间的距离的一半之和即为x、y中的最大者.

于是$E[\max(X,Y)]=\frac{1}{2}E(X+Y+|X-Y|)=\frac{1}{2}E(|E-Y|)$.

上式最后一步,是因为$E(X)=E(Y)=0$.

设$Z=X-Y$,由于X、Y都服从$N(0,1)$且相互独立,所以$Z\sim N(0,(\sqrt{2})^2)$,其概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}},\ -\infty<z<+\infty$$

从而有

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{\infty}|z|f_Z(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}|z|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}dz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{4}}dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}}d\left(\frac{z^2}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

综上所述,得

$$E[\max(X,Y)]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

8. 已知$X\sim N(0,1)$,令$Y_k=\begin{cases}1, X\leqslant k\\0, X>k,\end{cases}$$(k=1,2)$.试求$D(Y_1+Y_2)$.最后结果可用$\Phi(k)$,$(k=1,2)$及其函数表示,其中$\Phi(x)$为$N(0,1)$的分布函数.

解 $D(Y_1+Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)$,

又 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)$.

依题意知,Y_1、Y_2都服从0-1分布,从而Y_1Y_2也服从0-1分布,它们的参数分别为

$$P\{Y_1=1\}=P\{X\leqslant 1\}=\Phi(1);$$
$$P\{Y_2=1\}=P\{X\leqslant 2\}=\Phi(2);$$

$$P\{Y_1Y_2=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=1\}=P\{X\leqslant 1,X\leqslant 2\}$$
$$=P\{X\leqslant 1\}=\Phi(1),$$

从而有

$$E(Y_k)=\Phi(k),D(Y_k)=\Phi(k)[1-\Phi(k)],k=1,2$$
$$E(Y_1Y_2)=\Phi(1),$$

于是 $D(Y_1+Y_2)=\sum_{k=1}^{2}\{\Phi(k)[1-\Phi(k)]\}+2\Phi(1)[1-\Phi(2)].$

9. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,又 $E(X)$ 存在,试证明

$$E(X)=\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}F(x)\mathrm{d}x.$$

证 设 X 的概率密度为 $f(x)$,则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad 1-F(x)=\int_x^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$$

于是有

$$\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}[\int_x^{\infty}f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x\xlongequal[\text{次序}]{\text{交换积分}}\int_0^{\infty}f(t)[\int_0^{t}\mathrm{d}x]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\infty}tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x;$$
$$\int_{-\infty}^{0}F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}[\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x\xlongequal[\text{次序}]{\text{交换积分}}\int_{-\infty}^{0}f(t)[\int_t^{0}\mathrm{d}x]\mathrm{d}t$$
$$=-\int_{-\infty}^{0}tf(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0}xf(x)\mathrm{d}x.$$

又 $E(X)$ 存在,所以

$$\int_0^{\infty}[1-F(x)]\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=E(X).$$

10. 设 Z 的概率密度为 $p(z)$,且当 $z\leqslant 0$ 时,$p(z)=0$,又知 $E(Z)=\mu_1,E(Z^2)=\mu_2$.今有二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{p(x+y)}{x+y}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $E(X)$、$E(Y)$ 和 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}x[\int_0^{\infty}\dfrac{p(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{令 }x+y=u}\int_0^{\infty}x\mathrm{d}x\int_x^{\infty}\frac{p(u)}{u}\mathrm{d}u\xlongequal[\text{次序}]{\text{交换积分}}\int_0^{\infty}\frac{p(u)}{u}[\int_0^{u}x\mathrm{d}x]\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}up(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mu_1.$$

由 (X,Y) 的联合概率密度关于 x、y 的对称性知,$E(Y)=E(X)=\dfrac{1}{2}\mu_1$.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}x[\int_0^{\infty}y\frac{p(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x+y=u}$$
$$=\int_0^{\infty}x[\int_x^{\infty}(u-x)\frac{p(u)}{u}\mathrm{d}u]\mathrm{d}x\xlongequal[\text{次序}]{\text{交换积分}}\int_0^{\infty}(p(u)-\frac{xp(u)}{u})[\int_0^{u}x\mathrm{d}x]\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^\infty p(u)\left[\int_0^u x\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u - \int_0^\infty \frac{p(u)}{u}\left[\int_0^u x^2\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2 p(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{3}\int_0^\infty u^2 p(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_2 = \frac{1}{6}\mu_2$$

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{6}\mu_2 - \frac{1}{4}\mu_1^2.$

11. 设(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y) & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, ρ_{XY}.

解 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x;$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x;$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\cdot\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x;$$

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\mathrm{d}x = \pi - 2$,

于是

$$E(X) = \frac{\pi}{4},\quad E(X^2) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,\quad D(X) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

同理 $E(Y) = \frac{\pi}{4}$, $D(Y) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$,

又 $E(XY) = \frac{\pi}{2} - 1$,

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 1$,

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2} = -\frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$$

12. 设 θ 在$[0,2\pi]$上服从均匀分布，$X=\cos\theta$, $Y=\cos(\theta+a)$, a 为常数且 $0\leqslant a\leqslant 2\pi$. 求 $E(X)$、$E(Y)$、$D(X)$、$D(Y)$、$\mathrm{Cov}(X,Y)$. 问何时 X、Y 不相关，此时 X、Y 是否独立.

解 $E(X) = E(\cos\theta) = \int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta = 0;$

$$E(Y)=E[\cos(\theta+a)]=\int_0^{2\pi}\cos(\theta+a)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0;$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)=E(\cos^2\theta)=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2};$$

$$D(Y)=E(Y^2)=E[\cos^2(\theta+a)]=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta+a)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)=E[\cos\theta\cos(\theta+a)]\\&=\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos(\theta+a)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\cos a;\end{aligned}$$

又

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}}=\cos a.$$

故当 $a=\frac{\pi}{2}$ 或 $a=\frac{3\pi}{2}$时，$\rho_{XY}=0$，即 X,Y 不相关．此时有 $X=\cos\theta, Y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ 或 $Y=\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\theta$，即 $X^2+Y^2=1$，所以 X、Y 不独立．

或计算 $P\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$、$P\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$、$P\left\{0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$．易知，

$$\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant2\pi-\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\left\{0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left\{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right\}\cup\left\{\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}\cup\left\{\pi\leqslant\theta\leqslant\pi+\frac{\pi}{6}\right\}\cup\left\{2\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant2\pi\right\}.$$

故$\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$与$\left\{0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$互斥，于是有

$$0=P\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}\neq P\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cdot P\left\{0\leqslant Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

这表明 X、Y 不独立．

综上所述可知，当 X、Y 不相关时，X、Y 不独立．

13. 已知随机变量 X 和 Y 分别服从$N(1,3^2)$和 $N(0,4^2)$，X 与 Y 的相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$；令 $Z=\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y$.

(1)求 $E(Z)$、$D(Z)$；

(2)求 X 与 Z 的相关系数ρ_{XZ}；

(3)问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

解 (1)$E(Z)=E\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y\right)=\frac{1}{3}E(X)-\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}D(Z)&=D\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y\right)=D\left(\frac{1}{3}X\right)+D\left(\frac{1}{2}Y\right)-2\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{3}X,\frac{1}{2}Y\right)\\&=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)-2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}\times3^2+\frac{1}{4}\times4^2-\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}\\&=1+4-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=7.\end{aligned}$$

(2)$\rho_{XZ}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}$

又
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y\right)\\&=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)-\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{3}D(X)-\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=\frac{1}{3}\times3^2-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=6.\end{aligned}$$

于是
$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{6}{3\times\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

(3)X 与 Z 不相互独立．因为 $\rho_{XZ}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}\neq0$,所以 Z 与 Z 不相互独立．

这是根据相关系数的性质:“若 X、Y 独立且 ρ_{XY}存在,则 $\rho_{XY}=0$.”(见本章内容提要中的 7 的(1))的逆否形式:“若 ρ_{XY}存在且 $\rho_{XY}\neq0$,则 X、Y 不独立．”得出的．

14. 设 X_1、X_2、…、$X_{2n}(n>2)$是相互独立、同分布且二阶原点矩存在的 $2n$ 个随机变量．

令
$$U=X_1+X_2+\cdots+X_{2n-k+1},$$
$$V=X_k+X_{k+1}+\cdots+X_{2n},$$
其中 k 为满足 $1<k<n$ 的正整数．

试讨论 U 与 V 的相关系数的存在性;若 U 与 V 的相关系数存在,求其值．

解 由于 X_i 的二阶原点矩存在,故 X_i 的方差存在;又 X_1、X_2、…、X_{2n}相互独立,故可设
$$D(X_i)=\sigma^2,(i=1,2,\cdots,2n)$$

下面分 $\sigma^2=0$ 和 $\sigma^2>0$ 两种情况讨论．

(1)当 $\sigma^2=0$ 时,则有
$$D(U)=D\left(\sum_{i=1}^{2n-k+1}X_i\right)=\sum_{i=1}^{2n-k+1}D(X_i)=0;$$
$$D(V)=D\left(\sum_{i=k}^{2n}X_i\right)=\sum_{i=k}^{2n}D(X_i)=0.$$

故此时,U 与 V 的相关系数不存在．

(2)当 $\sigma^2>0$ 时,则有
$$D(U)=D\left(\sum_{i=1}^{2n-k+1}X_i\right)=\sum_{i=1}^{2n-k+1}D(X_i)=(2n-k+1)\sigma^2>0;$$
$$D(V)=D\left(\sum_{i=k}^{2n}X_i\right)=\sum_{i=k}^{2n}D(X_i)=(2n-k+1)\sigma^2>0.$$

下面用两种方法求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV}.

法 1 $\rho_{UV}=\dfrac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\dfrac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$.

设 $E(X_i)=\mu,(i=1,2,\cdots,2n)$

注意到,当 $i\neq j$ 时,X_i 与 X_j 相互独立,则有
$$E(X_iX_j)=\begin{cases}\mu^2, & i\neq j;\\ \mu^2+\sigma^2, & i=j.\end{cases}\qquad(1\leqslant i,j\leqslant2n)$$

易计算出

$$E(U)=E(V)=(2n-k+1)\mu;$$
$$E(UV)=(2n-k+1)^2\mu^2+2(n-k+1)\sigma^2.$$

于是，得

$$\rho_{UV}=1-\frac{k-1}{2n-k+1}.$$

法 2 $D(U-V)=D(X_1+\cdots+X_{k-1}-X_{2n-k+2}-\cdots-X_{2n})$
$=2(k-1)\sigma^2$;

又 $D(U-V)=D(U)+D(V)-2\mathrm{Cov}(U,V)$
$=D(U)+D(V)-2\rho_{UV}\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}$
$=2(2n-k+1)\sigma^2-2(2n-k+1)\sigma^2\rho_{UV}$.

由于上两式相等，于是可得

$$\rho_{UV}=1-\frac{k-1}{2n-k+1}.$$

五、习题与答案

习 题

1. 设事件 A 在第 i 次试验中出现的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots)$，X 表示第一次到第 n 次试验中 A 出现的次数之和．试求 $E(X)$、$D(X)$．

2. 民航机场的送客汽车载有 20 位旅客从机场开出，旅客可以在 10 个车站下车．如果到达某一站时没有旅客下车，则不在该站停车．假定每位旅客在各个车站下车是等可能的，各位旅客在某站是否下车是相互独立的．设 X 为汽车的停车次数，求 $E(X)$．

3. 某人的一串钥匙有 n 把，其中只有一把能打开他的门．现随机任取一把试开，设试开此门的次数为 X．分别在

(1)把每次试开的钥匙与未试开过的区分开；

(2)把每次试开的钥匙与未试开过的混在一起不加区别．

两种情况下，求 $E(X)$、$D(X)$．

4. 同时独立地掷 n 枚匀称的骰子一次，求出现的点数之和的数学期望和方差．

5. 进行某试验的次数 X 是服从参数为 λ 的泊松分布的随机变量，每次试验成功的概率都是 $p(0<p<1)$，不成功的概率都是 $1-p$．试求某试验成功的次数 Y 的数学期望与方差．假定各次试验成功与否是相互独立的．

6. 设 $X\sim\pi(\lambda)$，令

$$Y=\begin{cases}1, & X\text{ 取偶数(包括零)};\\ 0, & X\text{ 取奇数}.\end{cases}$$

试求 $E(Y)$、$D(Y)$．

7. 设 X、Y 相互独立且都服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$，令 $Z=X-Y$．试求 $E(|Z|)$、$D(|Z|)$．

8. 设随机变量 X 取值于区间 $[a,b]$，证明 $D(X)\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

9. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty$$

(1)求 X、$|X|$ 的数学期望和方差．

(2)求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关．

(3)问 Z 与 $|X|$ 是否独立？为什么？

10. 设离散型随机变量 X 与 Y 相互独立，服从同一分布：

$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=p(1-p)^k, 0<p<1, k=0,1,2,\cdots$

求 $E[\max(X,Y)]$.

答案与提示

1. 提示：引入随机变量 X_i：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次试验 } A \text{ 出现;}\\ 0, & \text{否则．}\end{cases}$$

则有 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，且 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 相互独立．

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i$，$D(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)$.

2. 提示：引入随机变量 X_i：

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{在第 } i \text{ 站有旅客下车}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则

X_i	0	1
P	$\left(1-\frac{1}{10}\right)^{20}$	$1-\left(1-\frac{1}{10}\right)^{20}$

又 $X=\sum_{i=1}^{20}X_i$ 且 X_1、X_2、$\cdots$、X_{20} 相互独立．

$$E(X)=10\cdot\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right].$$

3. 提示：

(1) X 的分布列为

X	1	2	$\cdots$	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

(2) X 的分布列为

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$	$\cdots$

答案(1)$E(X)=\frac{n+1}{2}$,$D(X)=\frac{n^2-1}{12}$;

(2)$E(X)=n$,$D(X)=n(n-1)$

4. 提示:设出现点数之和为 X,X_i 为第 i 颗骰子出现的点数,则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 且 X_1、X_2、…、X_n 相互独立.

$$E(X)=\frac{7}{2}n,D(X)=\frac{35}{12}n$$

5. 提示:由本书第一章典型例题 19 可知,$Y\sim\pi(\lambda p)$.

$$E(Y)=\lambda p,D(Y)=\lambda p.$$

6. 提示:参考本章典型例题6.

$$E(Y)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}),D(Y)=\frac{1}{4}(1-e^{-4\lambda})$$

7. $E(|Z|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$,$D(|Z|)=1-\frac{2}{\pi}$

8. 提示:由本章内容提要中方差的性质④可知:

$$D(X)\leqslant E\left(X-\frac{b+a}{2}\right)^2\leqslant E\left(a-\frac{b+a}{2}\right)^2=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

9. (1)$E(X)=0$,$D(X)=2$,$E(|X|)=1$,$D(|X|)=1$

(2)$\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$,$\rho_{X|X|}=0$,故 X 与 $|X|$ 不相关

(3)设 x 为一正实数,则有

$$\{|X|\leqslant x\}\subset\{X\leqslant x\}$$

又由 X 的概率密度可知

$$0<P\{|X|\leqslant x\}<1,\quad 0<P\{X\leqslant x\}<1$$

于是

$$P\{|X|\leqslant x,X\leqslant x\}=P\{|X|\leqslant x\}\neq P\{|X|\leqslant x\}P\{X\leqslant x\}$$

故 X 与 $|X|$ 不独立.

10. 提示:先求出 $M=\max(X,Y)$ 的分布律,由 $\{\max(X,Y)=k\}=\{X=k,Y=k\}\cup\{X=k,Y<k\}\cup\{X<k,Y=k\}$ 并注意到上式右端三个事件互不相容,利用 X、Y 相互独立、同分布,易得

$$P\{\max(X,Y)=k\}=p^2(1-p)^{2k}+2p(1-p)^k-2p(1-p)^{2k},k=0,1,2,\cdots$$

答案:$E\{\max(X,Y)\}=\frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}$.

第五章　大数定律和中心极限定理

一、基本要求

①了解契比雪夫(Чебышев)不等式、契比雪夫大数定律、伯努利(Bernoulli)大数定律和辛欣(XинчN)大数定律．

②知道独立同分布的中心极限定理和德莫佛(De Moivre)——拉普拉斯(Laplace)中心极限定理．

二、内容提要

1. 契比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，均有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{5.1}$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{5.2}$$

(5.1)、(5.2)式都称为契比雪夫不等式．

当 $D(X)>0$ 时，契比雪夫不等式还有下述两种常见的形式：

$$P\left\{\frac{|X-E(X)|}{\sqrt{D(X)}}\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}. \tag{5.3}$$

$$P\left\{\frac{|X-E(X)|}{\sqrt{D(X)}}<\varepsilon\right\}\geqslant1-\frac{1}{\varepsilon^2}. \tag{5.4}$$

2. 大数定律

设 X_1、X_2、…、X_n、…为随机变量序列，令 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$n=1,2,\cdots$，若存在常数列 a_1、a_2、…、a_n、…，使得对任意的 $\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-a_n|<\varepsilon\}=1.$$

则称随机变量序列 X_1、X_2、…、X_n、…服从大数定律(定理)．

(1)契比雪夫大数定律

若 X_1、X_2、…、X_n、…相互独立，它们的数学期望、方差都存在，且方差一致有界，即

$$E(X_i)=\mu_i,D(X_i)=\sigma_i^2\leqslant C(\text{常数})\qquad i=1,2,\cdots$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1. \tag{5.5}$$

其中 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(2)伯努利大数定律

设伯努利试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,m 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数,则对任意的 $\varepsilon>0$,均有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} = 1. \tag{5.6}$$

(3)辛欣大数定律

若 X_1、X_2、…、X_n、…相互独立同分布,它们的数学期望存在,即

$$E(X_i)=\mu, i=1,2,\cdots$$

则对任意的 $\varepsilon>0$,均有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{5.7}$$

3. 中心极限定律

中心极限定律是研究相互独立的随机变量序列 X_1、X_2、…、X_n、…的部分和 $Z_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 在什么条件下,当 $n\to\infty$ 时,它的极限是正态分布的问题.

(1)独立同分布的中心极限定律

若 X_1、X_2、…、X_n、…相互独立同分布,它们的数学期望、方差都存在且方差大于零,即

$$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0, i=1,2,\cdots$$

则 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化随机变量

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意的实数 x,均有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{5.8}$$

推论　在独立同分布中心极限定律的条件下,当 n 很大时,对任意的实数 $\alpha<\beta$,有下列近似公式:

$$P\left\{\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant \beta\right\} \approx \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{5.9}$$

(2)德莫佛——拉普拉斯中心极限定律

设伯努利试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,m 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数,则对任意的实数 x,均有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{5.10}$$

推论　在德莫佛——拉普拉斯中心极限定律的条件下,当 n 很大时,对任意的实数 $a<$

b,有下列近似公式:

$$P\left\{a<\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant b\right\}\approx\Phi(b)-\Phi(a). \tag{5.11}$$

三、问题与思考

1. 伯努利大数定律的理论意义是什么?

答 伯努利大数定律告诉我们,当独立重复试验的次数 n 很大时,事件 A 发生的频率$\frac{m}{n}$接近它的概率p是一个实际上的必然事件．这就从理论上证明了,事件的频率稳定于它的概率,并为用事件的频率估计事件的概率提供了依据．

2. 什么是"小概率原理",它的理论依据是什么?

答 小概率原理的含义是:小概率事件(即概率接近于零的事件)在一次试验中,可以认为它是几乎不发生的．

小概率原理的理论依据是:事件的频率稳定于它的概率,也可以说,小概率原理的理论依据是伯努利大数定律．

小概率原理也称为"实际推断原理".

3. 辛欣大数定律在实际应用中的指导意义是什么?

答 在实际工作中,人们为了提高某物理量的测量精度,往往是进行多次独立重复测量,然后取算术平均值,作为该物理量的值．这种作法的理论依据就是辛欣大数定律．其原因如下:

设某物理量的真值为 μ,它的测量值为随机变量 X,如果测量没有系统误差,仅有随机因素的影响,可以认为 $E(X)=\mu$. 对该物理量进行 n 次独立重复测量,第 i 次测量的结果为 X_i,则 X_1、X_2、…、X_n 相互独立且与 X 同分布．根据辛欣大数定律,当 n 很大时,$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 接近 μ 是一个实际上的必然事件．

如果 $D(X)=\sigma^2$ 存在,则有 $D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sigma^2$. 这表明:用 n 次独立重复测量的结果的算术平均值$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 作为μ 的近似值与用一次测量的结果X_i 作为μ 的近似值,相比较前者的精度较高．

四、典型例题

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^m}{m!}e^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

其中 m 为正整数,证明

$$P\{0<X<2(m+1)\}\geqslant\frac{m}{m+1}.$$

分析 由于 X 的概率密度已知，$P\{0<X<2(m+1)\}$ 是可以计算出来的，再证明这个概率不小于 $\frac{m}{m+1}$. 但是，这种作法要用到非工科的数学分析的一些知识．我们不采用这种方法．

注意到本章内容提要中契比雪夫不等式(5.2)即为

$$P\{E(X)-\varepsilon<X<E(X)+\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (*)$$

如果假设式$(*)$与所求证之式是同一个不等式，则有

$E(X)-\varepsilon=0$，即 $\varepsilon=E(X)>0$，

$E(X)+\varepsilon=2E(X)=2(m+1)$，得 $E(X)=m+1$，

$1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{D(X)}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$，得 $D(X)=m+1$.

这启发我们，只要根据 X 的概率密度计算出 $E(X)$、$D(X)$ 的值都是 $(m+1)$，取 $\varepsilon=m+1$，那么由式$(*)$即得所证．

证明 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=(m+1)\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}x^m\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=(m+1)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=m+1.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(m+2)\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=(m+2)(m+1),$$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=m+1$.

取 $\varepsilon=m+1$，利用契比雪夫不等式(5.2)，则

$P\{0<X<2(m+1)\}=P\{|X-(m+1)|<m+1\}=P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$.

2. 用契比雪夫不等式确定：当掷一枚匀称的硬币时，需掷多少次才能保证使正面出现的频率在0.4至0.6之间的概率不小于0.90. 如果用德莫佛——拉普拉斯中心极限定律计算这个问题，结果又如何?

解 设需掷 n 次满足要求，引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次掷出正面;}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次掷出反面.}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $P(X_i=k)=\frac{1}{2}$，$k=0,1$，$i=1,2,\cdots,n$，且 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 独立同分布，$E(X_i)=\frac{1}{2}$，$D(X_i)=\frac{1}{4}$.

令 $m=\sum_{i=1}^{n}X_i$，m 为 n 次掷硬币中出现正面的次数，于是 $E\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{2}$，$D\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{4n}$.

依题意，所求之 n 满足

$$P\left\{0.4<\frac{m}{n}<0.6\right\}\geqslant 0.90.$$

用契比雪夫不等式(5.2)式得

$$P\{0.4<\frac{m}{n}<0.6\}=P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|<0.1\right\}\geqslant 1-\frac{\frac{1}{4n}}{(0.1)^2}\geqslant 0.90$$

于是得 $n\geqslant 250$.

用德莫佛——拉普拉斯中心极限定律的推论(5.11)式得

$$P\{0.4<\frac{m}{n}<0.6\}=P\{0.4n<m<0.6n\}$$
$$=P\left\{\frac{0.4n-0.5n}{\sqrt{(0.5)^2n}}<\frac{m-0.5n}{\sqrt{(0.5)^2n}}<\frac{0.6n-0.5n}{\sqrt{(0.5)^2n}}\right\}$$
$$\approx 2\Phi(0.2\sqrt{n})-1\geqslant 0.9.$$

即得 $\Phi(0.2\sqrt{n})\geqslant 0.95$,或 $0.2\sqrt{n}\geqslant 1.645$,于是得 $n\geqslant 68$.

3. 某厂生产的螺钉不合格品率为 0.01,问一盒中应至少装多少只才能使其中含有 100 只合格品的概率不小于 0.95.

解 设一盒至少应装 n 只满足要求,引入

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 只螺钉为合格品};\\ 0, & \text{第 } i \text{ 只螺钉为不合格品}.\end{cases}$$

则 $X_1、X_2、\cdots、X_n$ 独立同分布且 $P(X_i=k)=(0.99)^k\times(0.01)^{1-k}, k=0,1, i=1,2,\cdots,n$, $E(X_i)=0.99=\mu, D(X_i)=0.01\times 0.99=\sigma^2$.

依题意所求之 n 满足

$$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 100\}\geqslant 0.95.$$

用独立同分布的中心极限定律(5.8)式得

$$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i\geqslant 100\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\geqslant\frac{100-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right\}$$
$$\approx 1-\Phi\left(\frac{100-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\geqslant 0.95,$$

即得

$$\Phi\left(\frac{100-n\times 0.99}{0.1\sqrt{n\times 0.99}}\right)\leqslant 0.05.$$

查标准正态分布表得 $\dfrac{100-n\times 0.99}{0.1\sqrt{n\times 0.99}}\leqslant -1.645$.

令 $x=n\times 0.99$,得 $x-0.1645\sqrt{x}-100\geqslant 0$,解上述不等式,得 $x\geqslant 101.66$,于是 $n\geqslant 101.66/0.99=102.69$,取 $n=103$ 为所求.

五、习题与答案

1. 设 $X_1、X_2、\cdots、X_n$ 是独立同分布的随机变量,X_1 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

试证：$P\{0<\sum_{i=1}^{n}X_i<4n\}\geqslant\frac{2n-1}{2n}$.

2. 独立重复掷一枚非均匀的硬币．设每次掷该硬币正面出现的概率都是 p(未知)．问要掷多少次才能使正面出现的频率与 p 的差不超过0.01的概率达到0.95以上．用契比雪夫不等式和德莫佛——拉普拉斯中心极限定律分别计算之．

3. 某保险公司有10000人参加保险，每人一年付12元保险费．设在一年内一个人死亡的概率为0.006，死亡时保险公司付给家属1000元保险金．问：

(1)保险公司亏本的概率是多少?

(2)保险公司一年盈利不少于40000元的概率是多少?

4. 某厂的自动生产线，生产一件产品为正品的概率为 $p(0<p<1)$，为次品的概率为 $q=1-p$．一件产品的成本为 c，正品的价格为 s，次品不能出售．假定各个产品的生产过程是相互独立的．若 $p=0.9, s=5$ 元，$c=2.5$ 元．问厂家一批至少生产多少件产品，才能保证(平均而言)每件产品的利润超过1.8元的概率大于0.9.

答案与提示

1. 提示：$E(X_i)=2, D(X_i)=2, E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=2n, D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=2n$．利用契比雪夫不等式(5.2)，即得

2. 提示：仿本章典型例题2、用契比雪夫不等式得 $n\geqslant 50000$；用德莫佛—拉普拉斯中心极限定律得 $n\geqslant 9604$，其中用到 $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$

3. (1)0，(2)0.995

4. 每批至少应生产93件产品

第六章　样本与抽样分布

一、基本要求

① 理解数理统计的基本概念：总体、个体、样本、统计量．

② 掌握样本均值、样本方差和样本矩的计算．了解经验分布函数与直方图的作法．

③ 了解三个重要分布：χ^2分布、t分布、F分布的定义和性质，了解常用概率分布分位数的概念并会查表求分位数．

④ 理解正态总体的样本均值与样本方差分布的有关定理．

二、内容提要

1. 总体与个体

我们把研究对象的全体称为总体．把组成总体的每一个对象称为个体．总体可以分为有限总体和无限总体．

总体可以用随机变量 X 表示，常称为总体 X.

2. 简单随机样本

总体中的一部分个体组成的集合称为样本．从总体中一个个地随机地抽取 n 次个体进行试验，记录其结果得数据为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称它为容量为 n 的样本观测值或称容量为n 的样本值，它可看作 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一个观测值．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为容量为 n 的样本．

定义：([1].P141) 设总体为 X，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与 X 同分布，则称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体 X 的容量为n 的简单随机样本(简称为样本).

3. 样本的联合分布

① 若总体 X 的分布函数为$F(x)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 $F(x)$ 的样本，其联合分布函数为：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

② 若总体X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$f(x)$的样本，其联合概率密度为：

$$f(X_1,X_2,\cdots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

4. 经验分布函数

① 定义：([1].P.143) 设总体 X 的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，将它们按由小到大的顺序排列

为 $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \cdots \leqslant x_n^*$，对任意的实数 x，定义函数

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x<x_1^*;\\ \dfrac{k}{n}, & x_k^* \leqslant x < x_{k+1}^* \quad k=1,2,\cdots,k-1;\\ 1, & x \geqslant x_n^*.\end{cases}$$

则称 $F_n^*(x)$ 为总体 X 的经验分布函数．

② 总体的概率密度的估计——直方图([1].P143).

5. 统计量与样本的数字特征

① 定义:([1].P146) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的容量为 n 的样本，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在 R^n 或 R^n 子集上的普通函数，如果 g 中不含有任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为统计量．

② 样本的一些数字特征．

样本均值 $\overline{X} \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,

样本方差 $S^2 \triangleq \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$.

样本 k 阶原点距 $M_k \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k, k=1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩 $M_K \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k, k=2,3,\cdots$

③ 定理([1].P146,定理6.1)设总体 X 的二阶矩存在，即 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$ 存在，则

a. $E(\overline{X})=E(X)=\mu$

b. $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\sigma^2}{n}$

c. $E(S^2)=D(X)=\sigma^2$

6. 三个重要分布的定义及其性质

(1) χ^2 分布

定义:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从 $N(0,1)$，则随机变量 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，即 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

性质:

a. 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$.

b. 若 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，又它们相互独立，则 $\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$.

c. 若总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自该总体的样本，则

$$2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2(2n).$$

(2) t 分布

定义:设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则称随机变量 $T_n=X/\sqrt{\dfrac{Y}{n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，即 $T_n \sim t(n)$.

性质：当 $n \to \infty$ 时，t 分布的极限分布是标准正态分布 .

(3) F 分布

定义：设 $V \sim \chi^2(m)$，$W \sim \chi^2(n)$，且 V 与 W 相互独立，则随机变量 $F_{m,n} = \dfrac{V/m}{W/n}$ 服从第一自由度为 m，第二自由度为 n 的 F 分布，即 $F_{m,n} \sim F(m,n)$.

性质：若 $F \sim F(m,n)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n,m)$.

7. 正态总体的样本均值，样本方差的分布

① 费歇(Fisher)定理：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其样本均值为 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，样本方差为 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则

a. $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

b. $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$；

c. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

② 费歇定理的推论 .

a. $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$；

b. $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

③ 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，其样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S_1^2. 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其样本为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$，样本均值为 $\overline{Y}$，样本方差 S_2^2，且两个样本相互独立，则有

a. $U = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$；

b. $\chi^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$；

c. $F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

特别当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时，$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$；

d. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时，

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

其中 $S_W = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

三、问题与思考

1. 设随机变量 X_i 服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$．试问若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 可以看作一组样本，则它应满足什么条件？

答 我们所说的样本是简单随机样本，它必须满足二个条件：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与总体同分布．故本题中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 应相互独立，且 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 全相等才可以看作一组样本．

2. 设总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，"样本方差 S^2 服从 χ^2 分布"的说法对吗？

答 这种说法不对．

由费歇定理可知，对正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 而言，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布．

其分布密度是 $\chi^2(y,n-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}y^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0 & y\leqslant 0.\end{cases}$

记 $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Rightarrow S^2=\dfrac{\sigma^2}{n-1}Y$.

已知 $Y\sim\chi^2(n-1)$，用求随机变量函数的概率分布的方法，可得 S^2 的分布密度是：

$$f(x)=\chi^2\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}x,n-1\right)\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{n-1}{2\sigma^2}x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

即，S^2 服从参数 $\alpha=\dfrac{n-1}{2}$ 和 $\lambda=\dfrac{n-1}{2\sigma^2}$ 的 Γ 分布．

注：费歇定理是个很重要的定理，应用时要注意其条件和结论．

3. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是它的样本 $(n>1)$，试问下述两个结论是否正确？并说明理由．

(1) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}\sqrt{(n-1)n}\sim t(n-1)$;

(2) $\dfrac{(\overline{X}-\mu)n}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}\sim t(n)$.

答 (1) 是正确的．(2) 不正确．

其理由如下：

(1) 由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

由费歇定理可知 ① $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\xlongequal{\text{记}}U\sim N(0,1)$;

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\xlongequal{记}W\sim\chi^2(n-1)$;

③ $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立．故有 U 与 W 相互独立．由 t 分布定义,可知

$$\frac{U}{\sqrt{W/n-1}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sum_1^n(X_i-\overline{X})^2}}\sqrt{(n-1)n}\sim t(n-1).$$

(2) 由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

知 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ 即 $Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),i=1,2,\cdots,n$. 由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立知 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立．因此,由 χ^2 分布定义可知 $W=\frac{\sum_1^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=i=\sum_1^n Y_i^2\sim\chi^2(n)$. 又由费歇定理推论可知 $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,但是,不能由此就得 $\frac{U}{\sqrt{W/n}}$ 服从 $t(n)$ 分布,这是因为:W 和 U 之间不独立．

例如:$n=2$ 时,$U=\frac{Y_1+Y_2}{\sqrt{2}}$, $W=Y_1^2+Y_2^2$

$\because \frac{Y_1^2+Y_2^2}{2}\geqslant\left(\frac{Y_1+Y_2}{2}\right)^2 \quad \therefore Y_1^2+Y_2^2\geqslant\left(\frac{Y_1+Y_2}{\sqrt{2}}\right)^2$ 即 $W\geqslant U^2$

可以证明 W 与 U 不独立．事实上,若 W,U 独立,则应该有 $P(U>1,W<1)=P(U<1)P(W<1)$ 但是由于 $W\geqslant U^2$,上式左边 $=0$,但右边 $\neq 0$. 所以上式不成立,故 W 与 U 不独立．

同理可证,n 取任何大于 1 的正整数时,W 和 U 都不独立．

四、典型例题

1. 设总体 X 服从参数为 p 的 0－1 分布,$p(0<p<1)$ 未知．

(1) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是该总体的样本,试问下列函数哪些是统计量?为什么?

$\sum_{i=1}^n X_i$, $\quad \sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$, $\quad X_4-6$,

$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$, $\quad X_n+pX_1$, $\quad \frac{1}{p}(X_1+X_{10})$.

(2) 已知样本容量为 8 的一个样本值为(0,1,0,1,1,,0,1,1) 试求样本均值和样本方差．

答 (1) $X_n+pX_1,\frac{1}{p}(X_1+X_{10})$ 不是统计量．因为它们含有未知参数 p. 其他几个函数中不含有未知参数,仅是样本的函数,所以都是统计量．

(2) 样本均值 $\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^8 x_i=\frac{1}{8}(0+1+0+1+1+0+1+1)=\frac{5}{8}=0.63$,

样本方差 $\quad S^2=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^8\left(x_i-\frac{5}{8}\right)^2=\frac{1}{7}\sum_1^8 x_i^2-8\bar{x}^2)=0.27$.

2. 设总体 X 是由三个个体:数 2,3 和 7 组成．采取有放回方式抽取容量为 2 的样本．试求:

(1) 总体的均值 μ 和方差 σ^2.

(2) 样本平均值 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2.

(3) $E(\overline{X}), D(\overline{X})$ 和 $E(S^2)$.

分析:由题意可知总体的分布律是:

X	2	3	7
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

解 (1) $\mu = \frac{1}{3}(2+3+7) = 4$;

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}[(2-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2] = \frac{14}{3}.$$

(2) 由于没有给出样本(X_1, X_2)的样本值,所以要考虑样本值(x_1, x_2)的所有可能情况. 对有放回地抽样(x_1, x_2)共有 $3^2 = 9$ 种可能它们是:

(2,2),(2,3),(2,7),(3,2),(3,3),(3,7),(7,2),(7,3),(7,7).

所以样本平均值(代入 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$)分别为:

2, 2.5, 4.5, 2.5, 3, 5, 4.5, 5, 7.

样本方差$\left[代入公式\ S^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_i - \bar{x})^2 \xlongequal{整理} \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2\right]$分别是 0,0.5, 12.5,0.5,0,8, 12.5,8,0.

(3) $E(\overline{X}) = E(X) = 4 \qquad D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{7}{3} \qquad E(S^2) = \sigma^2 = \frac{14}{3}$.

3. 盒中有三件产品,其中一件次品,二件正品. 每次从中任取一件,记正品的件数是随机变量 X. 有放回地抽取 10 次,得到容量为 10 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$. 试求:

(1) 样本均值的数学期望;

(2) 样本均值的方差;

(3) $\sum_{i=1}^{10} X_i$ 的概率函数.

分析 由题意可知总体 X 表示从盒中任取一件产品的正品数,它服从 0 - 1 分布.

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

设 X_i 表示第 i 次抽取的产品的正品数,它与总体 X 同分布($i = 1,2,\cdots,10$).

解 总体 X 服从参数 $p = \frac{2}{3}$ 的 0 - 1 分布

$E(X) = \frac{2}{3}, \qquad D(X) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

(1) $E(\overline{X}) = E(X) = \frac{2}{3}$.

(2) $D(\overline{X}) = \frac{1}{10}D(X) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{45}$.

(3) 因为 X_i 服从参数为 $p=\frac{2}{3}$ 的 0－1 分布　$i=1,2,\cdots,10$. 又 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 相互独立所以 $\sum_{i=1}^{10}X_i$ 服从二项分布 $B(10,\frac{2}{3})$.

即 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i=k\}=C_{10}^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}, k=0,1,2,\cdots,10.$

4.　设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本，试写出样本的联合概率密度．

解　由已知条件，总体 X 的概率密度是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

X_i 与 X 同分布，即

$$X_i\sim f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x_i\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度是：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)^n}, & a\leqslant \begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

5.　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的容量为 n 的样本值，现又获得第 $n+1$ 个观察值 x_{n+1}，试证明：

(1) $\bar{x}_{n+1}=\frac{n}{n+1}\bar{x}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}$.

(2) $S_{n+1}^2=\frac{n-1}{n}S^2+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\bar{x})^2$.

其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$,　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$.

$\bar{x}_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i$,　$S_{n+1}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2$

证明　(1) $\bar{x}_{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})$

$$=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)+\frac{1}{n+1}x_{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}\bar{x}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}.$$

(2) $S_{n+1}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}\left[x_i-\left(\frac{n}{n+1}\bar{x}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{n+1}(\bar{x} - x_{n+1})\right]^2 + \frac{1}{n}\left[x_{n+1} - \frac{n}{n+1}\bar{x} - \frac{1}{n+1}x_{n+1}\right]^2$$

$$= \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{2}{n}\frac{1}{n+1}(\bar{x} - x_{n+1})\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2}(\bar{x} - x_{n+1})^2 + \frac{n}{(n+1)^2}(\bar{x} - x_{n+1})^2$$

$$= \frac{n-1}{n}S^2 + \frac{1}{n+1}(\bar{x} - x_{n+1})^2.$$

因为$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$,

所以上式中$\frac{2}{n}\frac{1}{n+1}(\bar{x} - x_{n+1})\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

注 本题说明,如果样本增加一个样本值 x_{n+1},则新样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 的均值与方差无需重新计算,可利用上述关系式得到.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是两个样本,且有如下关系:

$Y_i = \frac{1}{b}(X_i - a), i = 1,2,\cdots,n.(a,b \neq 0$都为常数)试求样本均值 $\overline{X}$ 和$\overline{Y}$,样本方差 S_X^2 与S_Y^2 之间的关系.

解 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b}(X_i - a) = \frac{1}{b}(\overline{X} - a)$.

即得 $\overline{X} = b\overline{Y} + a$.

$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - a}{b} - \frac{\overline{X} - a}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{b^2}S_X^2.$$

即得 $S_X^2 = b^2 S_Y^2$.

注 当样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的每一个分量过大或过小时,为了计算简便,提高精度,可适当选择常数 $a,b \neq 0$,作线性变换 .$y_i = \frac{1}{b}(x_i - a), i = 1,2,\cdots,n$,使变换后的数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 大小适中.首先计算 $\bar{y},S_y^2$,只需做上述线性变换即得 $\bar{x}$ 和S_X^2 的值.

7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该总体的样本,记 $\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i(1 \leq k \leq n-1)$,求统计量 $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k$ 的分布.

分析 本题研究的统计量是取自正态总体.有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量.只要求出它们的期望和方差就可以了.而统计量 $\overline{X}_{k+1}$ 与 $\overline{X}_k$ 并不独立,可将 $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k$ 变形为相互独立的随机变量的线性组合的情形求解.

解 $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}X_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1}X_i - \frac{k+1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1}X_i - \sum_{i=1}^{k}X_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}(X_{k+1} - \overline{X}_k).$$

∵ X_{k+1} 与 $\overline{X}_k$ 是相互独立的，且求得

$$E\left[\frac{1}{k+1}(X_{k+1}-\overline{X}_k)\right]=\frac{1}{k+1}[E(X_{k+1})-E(\overline{X}_k)]=\mu-\mu=0$$

$$D\left[\frac{1}{k+1}(X_{k+1}-\overline{X}_k)\right]=\frac{1}{(k+1)^2}[D(X_{k+1})+D(\overline{X}_k)]$$

$$=\frac{1}{(k+1)^2}\left(\sigma^2+\frac{\sigma^2}{k}\right)=\frac{\sigma^2}{k(k+1)}.$$

可知统计量

$\overline{X}_{k+1}-\overline{X}_k$ 服从正态分布 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{k(k+1)}\right)$.

8. ([1],6.9) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是该总体的样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，证明

$$T=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1).$$

分析　本题要用 t 分布定义证明．应由题设条件找出服从 $N(0,1)$ 分布的随机变量为分子，以 χ^2 分布的随机变量为分母，由 t 分布定义可证明所需结果．

证明　总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

由费歇定理可知，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立．

又 $E(X_{n+1}-\overline{X})=E(X_{n+1})-E(\overline{X})=\mu-\mu=0.$

$$D(X_{n+1}-\overline{X})=D(X_{n+1})+D(\overline{X})$$

$$=\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=\frac{n+1}{n}\sigma^2.$$

由相互独立的正态随机变量之和仍是正态随机变量的结论可知　$X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$

$$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\overset{\text{记}}{=\!=}U\sim N(0,1).$$

又由费歇定理可知　$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\overset{\text{记}}{=\!=}W\sim\chi^2(n-1)$ 由 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，X_{n+1} 与 S^2 相互独立，可知 U 与 W 相互独立．

由 t 分布定义，知

$$\frac{U}{\sqrt{W/n-1}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}/\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1).$$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量，X_i 服从正态分布 $N(\mu,\sigma_i^2)$，$\sigma_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$．记 $Y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}}$，　$W=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_i}-\frac{Y-\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)^2$ 试证明：

(1) Y 服从正态分布；(2) W 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布．

分析 1° 容易看出 $\frac{X_i-\mu}{\sigma_i} \xlongequal{记} Z_i$ 服从正态分布 $N(0,1)$.

2° 要证明 W 服从 χ^2 分布，考虑 $\frac{Y-\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\bar{Z}$，可由费歇定理证明其结果．

证明 (1) $\because X_i\sim N(\mu,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n. X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，由独立的正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量的结论可知

$$Y=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma_i} \text{ 服从正态分布}.$$

又因为 $E(Y)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}E(X_i)=\mu.$

$$D(Y)=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}D(X_i)=\frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)^2}.$$

所以 $Y\sim N\left(\mu,\frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)^2}\right).$

(2) 令 $Z_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma_i}, i=1,2,\cdots,n$. 可知 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$

$$\begin{aligned}\bar{Z}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma_i}-\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\\&=\frac{Y}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}-\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}=\frac{Y-\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}.\end{aligned}$$

于是 $W=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_i}-\frac{Y-\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2.$

由费歇定理可知 W 服从 $\chi^2(n-1)$ 分布．

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别是从正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 和总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 中抽取的两个独立的样本．$\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别表示 X 和 Y 的样本均值，S_1^2 和 S_2^2 分别表示 X 和 Y 的样本方差．a 和 b 是两个非零实数．试求

$$Z=\frac{a(\bar{X}-\mu_1)+b(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}}} \text{ 的概率分布}.$$

分析 本题是正态总体，分子含有 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$，分母含有 S_1^2 和 S_2^2，初步判断 Z 服从 t 分布．

证明 $\because$ 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim N(u_2,\sigma^2)$ 由费歇定理知：

$$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{m}\right),\quad \bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

且知 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立．

又 $E[a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)]=0$;

$$D[a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)]=a^2D(\overline{X}-\mu_1)+b^2D(\overline{Y}-\mu_2)$$

$$=a^2\frac{\sigma^2}{m}+b^2\frac{\sigma^2}{n}=\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)\sigma^2.$$

因为相互独立的正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量,所以

$$a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)\sim N\left(0,\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)\sigma^2\right).$$

于是 $\dfrac{a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{a^2}{m}+\dfrac{b^2}{n}}\,\sigma}\overset{\text{记}}{=}U\sim N(0,1).$

又由费歇定理可知:$\overline{X}$ 与 S_1^2 独立,$\overline{Y}$ 与 S_2^2 独立,且 $\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$,$\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,由两个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立知道 S_1^2 与 S_2^2 相互独立,由 χ^2 分布性质,可知:

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\overset{\text{记}}{=}W\sim\chi^2(m+n-2).$$

又由上述证明可知 U 与 W 相互独立,由 t 分布定义可知:

$$\frac{U}{\sqrt{W/m+n-2}}=\frac{a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\dfrac{a^2}{m}+\dfrac{b^2}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

11. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是来自该总体的样本,$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 试问 $Y=\dfrac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从什么分布?并给予证明.

证明 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 又 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$

故 $U=\dfrac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,由 χ^2 分布定义可知 $U^2\sim\chi^2(1)$,又由费歇定理可知

$$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

因为 X_{n+1} 与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,可知 U 与 W 独立,再根据 χ^2 分布"可加"性质,得到

$Y=U^2+W=\dfrac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\dfrac{\sum\limits_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布,其自由度为 n.

12. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$,$\sigma^2>0$ 未知,X_1,X_2 是来自该总体的样本.

求 $P\left\{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}>39.864\right\}$.

解 因为 $X_i\sim N(0,\sigma^2)$,$i=1,2$,且 X_1 与 X_2 独立,可知 $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$,$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$,于是 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\overset{\text{记}}{=}U\sim N(0,1)$, $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\overset{\text{记}}{=}W\sim N(0,1)$

由 χ^2 分布定义知 $U^2\sim\chi^2(1)$,$W^2\sim\chi^2(1)$

由于 $S^2=\sum_{k=1}^{2}(X_i-\overline{X})^2=\left[X_1-\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]^2+\left[X_2-\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]^2$

$$=\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$$

由费歇定理可知 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ 与 S^2 独立，即得 U^2 与 W^2 独立，再由 F 分布定义知道 $\frac{U^2/1}{W^2/1}=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}\sim F(1,1)$

故 $P\left\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}>39.864\right\}\xlongequal{\text{查F表}}0.10.$

13. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知．从该总体中抽取容量为 $n=40$ 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{40}$，求 $P\left\{0.5\sigma^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\leqslant1.453\sigma^2\right\}$.

分析 解此类题首先是找出有关统计量的分布，将事件的表达式作适当变形，化为已知分布的统计量的关系式．再利用分位数概念查表求出结果．

解 ∵ 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知时，由费歇定理知

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

$$\therefore\quad P\left\{0.5\sigma^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_k-\overline{X})^2\leqslant1.453\sigma^2\right\}$$

$$=P\left\{\frac{0.5\sigma^2n}{\sigma^2}\leqslant\frac{\sum_{1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}{\sigma^2}\leqslant\frac{1.453\sigma^2n}{\sigma^2}\right\}$$

$$\xlongequal{n=40}P\left\{20\leqslant\frac{\sum_{1}^{40}(X_k-\overline{X})^2}{\sigma^2}\leqslant58.12\right\}$$

$$=P\{\chi^2(39)\geqslant20\}-P\{\chi^2(39)\geqslant58.12\}$$

$$=0.995-0.025=0.97.$$

14. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,3^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该总体的样本，且知 $P\{\overline{X}-1\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+1\}\geqslant0.95$，试求样本容量 n 的最小值（其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$）.

解 $P\{\overline{X}-1\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+1\}=P\{|\overline{X}-\mu|\leqslant1\}$

$$=P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}\geqslant0.95.$$

查标准正态分布表可知

$$\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\xlongequal{\sigma=3}\frac{\sqrt{n}}{3}>1.96\Rightarrow n\geqslant35.$$

所求样本容量 n 的最小值为 35.

15. 甲厂生产的一批灯泡，平均寿命为 $\mu_甲=1\,400$ 小时，标准差 $\sigma_甲=200$ 小时．乙厂生产的一批灯泡，平均寿命为 $\mu_乙=1\,200$ 小时，标准差为 $\sigma_乙=100$ 小时．从两批灯泡中分别抽

取容量为 $n=125$ 的样本,进行测试,问甲厂的灯泡的样本平均寿命 $\overline{X}$ 比乙厂灯泡的样本平均寿命 $\overline{Y}$ 至少大 160 小时的概率是多少?

分析 由于本题中两个总体分布均为未知.因此,不能用正态总体的有关定理,而要用大样本方法解决.

解 由于样本容量 $n=125$ 较大,可用大样本方法.即

$$\frac{\overline{X}-\mu_{甲}}{\sigma_{甲}/\sqrt{n}} \underset{n>50}{\overset{近似}{\sim}} N(0,1) \text{ 即 } \overline{X} \overset{近似}{\sim} N\left(\mu_{甲},\frac{\sigma_{甲}^2}{n}\right)$$

$$\frac{\overline{Y}-\mu_{乙}}{\sigma_{乙}/\sqrt{n}} \underset{n>50}{\overset{近似}{\sim}} N(0,1) \text{ 即 } \overline{Y} \overset{近似}{\sim} N\left(\mu_{乙},\frac{\sigma_{乙}^2}{n}\right)$$

本题所求为　求　$P\{\overline{X}-\overline{Y}\geqslant 160\}$

由于 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 是分别取自两个厂产品的样本平均值,所以是相互独立的.

又　$E(\overline{X}-\overline{Y})=\mu_{甲}-\mu_{乙}=1400-1200=200$

$$D(\overline{X}-\overline{Y})=\frac{\sigma_{甲}^2}{n}+\frac{\sigma_{乙}^2}{n}=\frac{200^2+100^2}{125}=20^2.$$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量,可知

$$\overline{X}-\overline{Y} \underset{n>50}{\overset{近似}{\sim}} N(200,20^2)$$

故　$P\{\overline{X}-\overline{Y}\geqslant 160\}=P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-200}{20}\geqslant\frac{160-200}{20}\right\}\approx 1-\Phi(-2)=1-[1-\Phi(2)]$
$=\Phi(2)$

$$\overset{查表}{=\!=\!=} 0.9772.$$

16. 设总体 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的样本,试求 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的概率函数.

解 由([1]P83 例 3.15)知道:

X_1+X_2 服从参数为 2λ 的泊松分布,即　$X_1+X_2\sim\pi(2\lambda)$

依此类推,可得到 n 个相互独立的泊松分布的随机变量之和仍是泊松分布,其参数是各个泊松分布参数之和.

即知　$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\pi(n\lambda)$

即　$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,3,\cdots$

所以　$P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}=P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{k}{n}\right\}$

$$=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,3,\cdots$$

五、习题与答案

习　　题

1. 选择题(每小题给出的四个选择中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内).

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是取自标准正态分布 $N(0,1)$ 总体的一个样本,$\overline{X}$ 是样本均值,S^2 是样本方差,则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $\overline{X}\sim N(0,1)$

(C) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$　　(D) $\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　答(　　)

(2) 设总体服从自由度为 k 的 χ^2 分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的一个样本,则 $n\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从 χ^2 分布,且自由度为

(A) $n+k$　　(B) nk

(C) $(n-1)(k+1)$　　(D) $k+n-2$　　答(　　)

(3) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,则随机变量 $\dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$ 服从的分布是

(A) $t(n)$　　(B) $t(n-1)$

(C) $F(n-1,n)$　　(D) $F(n,n-1)$　　答(　　)

(4) 设随机变量 X 服从自由度为(n,n)的 F 分布,若知 a 满足条件 $P(X>a)=0.05$,则 $P\left(X>\dfrac{1}{a}\right)=$

(A) 0.95　　(B) 0.05　　(C) 0.975　　(D) 0.025　　答(　　)

2. 填空题.

(1) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,3^2)$ 的样本,令 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-X_4)^2$,且 $a\cdot b\neq 0$,则当 $a=$ ________,$b=$ ________ 时;统计量 X 服从 χ^2 分布,其自由度为________.

(2) 设由 4 个个体,数 2,3,5,6 构成一个总体,有放回地抽取容量为 3 的样本,求得 $E(\overline{X})=$ ________;$E(S^2)=$ ________.

(3) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,0.2^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的一个样本.样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,要使 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}\geqslant 0.95$,则样本容量 n 至少应取值 = ________.

3. ([1],6.10) 已知随机变量 X 服从自由度为 n 的 t 分布,问随机变量 X^2 服从什么分布?并给予证明.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是分别来自正态总体 $N(0,3^2)$ 的两个相互独立的样本．试问统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从什么分布?参数是多少?并加以证明．

5. 总体 X 服从正态分布 $N(60,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{40}$，是该总体的样本．试求：

(1) $P\left\{|\overline{X}-60|>\dfrac{1}{2}\right\}$；(2) $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{40}(X_i-60)^2<88.6\right\}$.

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是该总体的一个样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2．欲使得 $P\{\overline{X}>\mu+kS\}=0.95$，则 k 应为何值?

7. 设总体服从参数为 $p=0.2$ 的 0－1 分布．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本．

(1) 当 $n=10$ 时，求 $P\{|\overline{X}|\leqslant 0.1\}$.

(2) 试确定样本容量 n，使 $E(|\overline{X}-p|^2)\leqslant 0.01$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

8. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，$\sigma^2>0$ 已知．若用样本均值 $\overline{X}$ 代替总体期望 μ 的误差不少于 0.10 的概率不大于 0.05．试问样本容量 n 应取多大?

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$．若已知 $n=9$，求 k 使得

$$P\{\overline{X}-kS<X_{10}<\overline{X}+kS\}=0.8.$$

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是取自标准正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，求 k，使得

$$P\left\{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}<k\right\}=0.90.$$

11. 记 $t_p(n)$，$F_p(m,n)$ 分别为 t，F 分布相应的上 p 分位数．求证 $\left[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right]^2=F_{1-\alpha}(1,n)$

12. 某厂生产的灯泡其使用寿命 X 服从正态分布 $N(2250,250^2)$，现进行质量检查，其方法如下：任意挑选 n 个灯泡，如果这 n 个灯泡平均寿命超过 2200 小时，就认为该厂生产的灯泡质量合格．若要使检查能通过的概率超过 0.997，问至少要检查的灯泡个数 n 为多少?

13. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别从该总体抽取容量为 n 的两个相互独立样本：$X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n}$ 和 $X_{21},X_{22},\cdots,X_{2n}$．为使两个样本的均值之差超过 σ 的概率大约为 0.01 时，n 应为多少?

14. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 为未知参数．$(X_1,X_2,\cdots,X_{13})$ 是来自该总体的样本．而 $\overline{X}=\dfrac{1}{13}\sum\limits_{i=1}^{13}X_i$，求 $P\left\{\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{13}X_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{13}(X_i-\overline{X})^2}>3.445\right\}$.

15. 设 $(-2,-1,3,3,4)$ 是容量为 5 的一个样本观察值．试求经验分布函数 $F_5(x)$.

答案与提示

1. (1) C；(2) B；(3) B.

(4) 若 $X \sim F(n_1,n_2)$,则$\frac{1}{X} \sim F(n_2,n_1)$,可知 $X \sim F(n,n)$,$\frac{1}{X} \sim F(n,n)$,所以 $P\left(X > \frac{1}{a}\right) = P(X < a) = 1 - F(X > a) = 0.95$. 故应选 A.

2. (1) $\frac{1}{45}$, $\frac{1}{90}$, 2

(2) 4, 2.5

(3) 由于 $P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{0.2/\sqrt{n}} < \frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\} \geqslant 0.95$,所以$\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}} \overset{查表}{=} u_{0.05} = 1.96$,解出 $n \geqslant 16$

3. 提示:随机变量 $X \sim t(n)$,可以认为 $X = \frac{Y_1}{\sqrt{Y_2/n}}$,其中 $Y_1 \sim N(0,1)$,$Y_2 \sim \chi^2(n)$,且 Y_1 与 Y_2 相互独立,由于 $Y_1^2 \sim \chi^2(1)$,$Y_2 \sim \chi^2(n)$,Y_1^2 与 Y_2^2 相互独立,所以由 F 分布定义,可以知道

$$X^2 = \frac{Y_1^2}{Y_2/n} \sim F(1,n).$$

4. 提示:由于 U 的分子是独立正态随机变量之和仍是正态分布,分母根号内因$\frac{Y_i}{3} \sim N(0,1)$,$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{3}\right)^2$ 服从 χ^2 分布且自由度为 n,初步判断 U 服从 t 分布 .

答:U 服从 t 分布,其参数即自由度是 9.

5. 答:(1) 0.114　　(2) 0.01

6. 提示:先将$\{\overline{X} > \mu + kS\}$ 变换成等价事件$\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{16}} > k\sqrt{16}\right\}$,再由$\frac{\overline{X}-\mu}{S/4}$ 服从 $t(15)$ 分布,便可解题 .

答:$k = -7.012\,4$.

7. 提示:(1) 由总体 $X \sim B(1,0.2)$,可知$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim B(n,0.2)$. 即知

$$P(\sum_{i=1}^{n}X_i = k) = C_n^k\, 0.2^k\, 0.8^{n-k},\ k = 0,1,\cdots,n.$$

$$P(|\overline{X}| \leqslant 0.1) = P(0 \leqslant \overline{X} \leqslant 0.1) = P(\overline{X} = 0) + P(\overline{X} = 0.1) = P(\sum_{i=1}^{10}X_i = 0)$$
$$+ P(\sum_{i=1}^{10}X_i = 0.1 \times 10) = P(\sum_{i=1}^{10}X_i = 0) + P(\sum_{i=1}^{10}X_i = 1) = 0.8^{10} + C_{10}^1(0.2)\cdot(0.8)^9 \doteq 0.375\,8$$

(2) $E(|\overline{X}-p|^2) = D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(0.2)(0.8) = \frac{0.16}{n} \leqslant 0.01 \Rightarrow n \geqslant 16.$

答 (1) 0.375 8　　(2) $n \geqslant 16$

8. 答:$n \geqslant 384.16\,\sigma^2$.

9. 提示:将$\{\overline{X} - kS < X_{10} < \overline{X} + kS\}$ 变换成等价事件$\{-kS < \overline{X} - X_{10} < kS\}$ $= \left\{\frac{|\overline{X}-X_{10}|}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}} < k\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right\}$,再由证明得知的$\frac{\overline{X}-X_{n+1}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 服从 $t(n-1)$ 分布,

便可解题.

答：$k = t_{0.01}(8)\sqrt{\frac{10}{9}} = 1.3968 \times 1.054 = 1.4724$.

10. 提示：统计量 $W = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$，其分子 $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$，分母根号内 $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \sim \chi^2(3)$. 且 $X_1 + X_2$ 与 $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2$ 独立，由 t 分布定义，可证明出 $\sqrt{\frac{3}{2}}W \sim t(3)$，再由 $P\{W < k\} = 1 - P\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}W > \sqrt{\frac{3}{2}}k\right\} = 0.9$，查 t 分布表，可得 k 值.

答：$k = 1.3364$.

11. 提示：由 3 题已证明若 $T \sim t(n)$，则 $T^2 \sim F(1,n)$. 再由分位数定义，可证明出结果.

12. 答：$n \geqslant 190$.

13. 答：$n \approx 14$.

14. 提示：本题关键是写出统计量 $W = \frac{(\sum_1^{13} X_i)^2}{\sum_1^{13}(X_i - \bar{X})^2}$ 的分布. 由于 $u = \frac{\sum_1^{13} X_i}{\sqrt{13}\sigma} \sim N(0,1)$，$u^2 \sim \chi^2(1)$ 而 $U = \frac{\sum_1^{13}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(12)$，且由 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，可知 u 与 U 独立，由 F 分布定义知 $\frac{12}{13}W$ 服从 $F(1,12)$ 分布.

再由 $P\{W > 3.445\} = P\left\{\frac{12}{13}W > 3.18\right\} \xlongequal{\text{查} F \text{表}} 0.10$

答：所求概率为 0.10.

15. 答：
$$F_5(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{5}, & -2 \leqslant x < -1, \\ \frac{2}{5}, & -1 \leqslant x < 3, \\ \frac{4}{5}, & 3 \leqslant x < 4, \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

第七章　参数估计

一、基本要求

①理解参数点估计的概念．掌握求点估计的两种方法：最大似然估计法和矩估计法．

②了解估计量的优良性准则（无偏性、有效性、相合性），并掌握验证估计量的无偏性方法．

③理解区间估计的概念，会求一个正态总体的均值与方差的置信区间和两个正态总体的均值差与方差比的置信区间．

二、内容提要

1．*参数点估计的方法*

（1）最大似然估计法．

最大似然估计法的基本思想是：根据样本的具体情况，选择参数 θ 的估计 $\hat{\theta}$ 使得该样本发生的概率最大．

用上述基本思想得到未知参数估计的方法称为最大似然估计法．

最大似然估计的求法．设已知总体 X 的概率密度或概率函数 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 的形式．$\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是只知其取值范围而不知其具体数值的未知参数．

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自该总体的样本值．

其似然函数是 $L=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$

使似然函数 L 达到最大值的 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的最大似然估计．

若似然函数 L 可微且参数集合是开集的条件下，求 L 的最大值点的问题可转化为求似然方程组 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_j}=0(j=1,2,\cdots,m)$ 的解如果 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_j}=0(j=1,2,\cdots,m)$ 有唯一的一组解，又能验证它们是 $\ln L$ 的最大值点，则它们是未知参数的最大似然估计．

注意：

①有时似然函数不可微或似然方程组无解，这时可用定义直接求未知参数的最大似然估计．

②未知参数的已知函数的最大似然估计：假设总体 X 的分布类型已知，其概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，未知参数的取值范围为 Θ，未知参数的已知函数为 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，若 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的最大似然估计，则规定 $g(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 为 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 的最大似然估计．

（2）矩估计法．

矩估计法的基本思想是：在总体存在所需要的各阶矩的条件下，用样本的各阶矩去估计总体的相应的各阶矩．由于总体的分布类型已知，总体的各阶矩可表示为未知参数的已知函数，这样样本的各阶矩与未知参数就联系起来了，从而可得到未知参数的估计．

用上述基本思想到未知参数的估计的方法称为矩法．用矩法求出的未知参数的估计称为矩估计．

矩估计的求法

已知总体 X 的概率函数或概率密度 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的形式，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是未知参数．且 $m_l=E(X^l),l=1,2,\cdots,k$ 都存在，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是取自该总体的样本值．

第一步，将未知参数表示为总体各阶矩的函数．$m_l=E(X^l)=g_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),l=1,2,\cdots,k$．其中 g 是 k 元已知函数．假定能从上式中解出 $\theta_l=h_l(m_1,m_2,\cdots,m_k),l=1,2,\cdots,k$．

第二步，用样本的各阶矩估计总体相应的各阶矩

$$\hat{m}_l=\widehat{E(X^l)}=M_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^l,\quad l=1,2,\cdots,k.$$

第三步，将 m_l 的估计值代入第一步中 θ_l 式得 $\hat{\theta}_l=h_l(\hat{m}_1,\hat{m}_2,\cdots,\hat{m}_k)$．$l=1,2\cdots,k$．即是未知参数的矩估计量．

注意：

①如果在求未知参数矩估计的第一步中用总体的各阶中心矩，第二步中用样本的各阶中心矩估计总体相应的各阶中心矩，则最后得到未知数的估计仍称为矩估计．

②总体的数学期望与方差的矩估计．设总体 X 的二阶矩 $m_2=E(X^2)$ 存在，总体 X 的分布类型未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的样本值．$E(X),D(X)$ 的矩估计分别是

$$\widehat{E(X)}=\bar{x},\quad \widehat{D(X)}=M'_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

2. 估计量的优良性准则

(1) 无偏性．

设未知参数的已知函数 $g(\theta)$ 的估计量为 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，如果对于一切的 $\theta\in\Theta$ 都有 $E_\theta[\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)]=g(\theta)$，则称 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 $g(\theta)$ 的无偏估计量．

注意：若 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的无偏估计，$h(\theta)$ 是 θ 已知函数，则 $h(\hat{\theta})$ 不一定是 $h(\theta)$ 的无偏估计见[1]，P167．

(2) 有效性．

设 $\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 $g(\theta)$ 的估计量，如果对一切的 $\theta\in\Theta$，都有

$$E_\theta[\varphi_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)-g(\theta)]^2\leqslant E_\theta[\varphi_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)-g(\theta)]^2$$

且存在 $\theta_0\in\Theta$，使上式左端严格小于右端，则称 φ_1 比 φ_2 有效．

注意：对 $g(\theta)$ 的几个无偏估计量，比较它们的有效性就是比较它们的方差，方差小者有效性为好．

(3) 相合性(一致性)．

设 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的估计量，如果对任意的 $\varepsilon>0$，都有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)-g(\theta)|<\varepsilon\}=1$，则称 φ 是 $g(\theta)$ 的相合估计量．

3. 参数的区间估计

①设总体 X 的样本为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，构造统计量 $A(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $B(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，且 $A\leqslant B$. $g(\theta)$ 是包含未知参数 θ 的已知函数．

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，若对一切的 $\theta\in\Theta$，都有 $P\{A(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant g(\theta)\leqslant B(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$. 则称 $[A,B]$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间．

②正态总体的均值和方差的区间估计．

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该总体的样本．那么，总体参数 μ,σ^2 的估计区间如表 1 所示．

表 1

条　件	μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间
$\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知	$\left[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$
σ^2 未知	$\left[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
条件	σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间
μ 未知	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$
$\mu=\mu_0$ 已知	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$

设有两个正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，其样本为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 $S_1{}^2$. 总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其样本为 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$，样本均值为 $\bar{Y}$，样本方差为 S_2^2，且两个样本相互独立．两个正态总体的均值差、方差比的置信区间见表 2.

表 2

条　件	$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$
σ_1^2,σ_2^2 未知 且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$	$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}},\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right]$ 其中 $S_w^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$
条件	σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间
μ_1,μ_2 未知	$\left[\frac{S_1{}^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}\right]$
已知 μ_1,μ_2	$\left[\frac{m}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2/\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)},\frac{m}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2/\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,m)}\right]$
注：以上参数的置信区间是用枢轴量法得到的，关于枢轴量法可见[1]，P172.	

③用大样本方法,求某些分布的总体参数的区间估计.

注:[P176]就(0-1)分布总体,用大样本方法求出了未知参数的区间估计.典型例题的12题和习题16题就是这方面的题目.

三、问题与思考

1. 矩估计是否具有唯一性?请举例说明.

答 在一般情况下,矩估计不是唯一的.由于在求矩估计的过程中,选取哪些样本的矩估计总体相应的矩,有一定的随意性.从而使得矩估计不具有唯一性.例如:

设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,λ 是未知参数.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自该总体的样本.

一方面,由于 $E(X)=\lambda$,又 $\widehat{E(X)}=\bar{X}$,所以 λ 的矩估计是 $\hat{\lambda}=\bar{X}$.

另外,由于 $D(X)=\lambda$,按照矩估计法,可有 $\widehat{D(X)}=M_2'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,这样,得到 λ 的又一矩估计为 $\hat{\lambda}=M_2'$.

2. 试举例说明最大似然估计不具有唯一性.

答 例如:设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\theta+\frac{1}{2},(-\infty<\theta<+\infty),\\ 0, & \text{其它}, \qquad \theta\text{ 是未知参数}.\end{cases}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自该总体的样本值.其似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\theta+\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

此题无法通过解似然函数方程的方法求得 L 的最大值点.要用最大似然估计的定义来求之.

要 L 最大,θ 应满足:

$$\theta-\frac{1}{2}\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\text{且}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\theta+\frac{1}{2}$$

即 $\theta\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}+\frac{1}{2}$ 且 $\theta\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}+\frac{1}{2}$

所以,θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$ 应满足上述不等式.而且,凡满足上述不等式的估计量 $\hat{\theta}$,都可作为 θ 的最大似然估计.如:

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{3}\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}+2\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-\frac{1}{2}\right]$$

$\hat{\theta}_2=\frac{1}{4}[3\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}-1]$ 等都是 θ 的最大似然估计.

3. 似然方程若有解,其解是否总是唯一的?若不是唯一的,其解是否都是未知参数的最大似然估计?请举例说明.

答 似然方程若有解,其解也不一定是唯一的,其解也不一定都是未知参数的最大似然估计.所以,通过解似然方程的方法求最大似然估计时,需要验证似然方程的解,是否是似然函

数的最大值点．

例如，总体 X 服从柯西(Cauchy)分布，其分布密度为：$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $-\infty<\theta<+\infty$ 为未知参数．

(x_1,x_2) 是取自该总体的一个样本值．其似然函数为 $L=\frac{1}{\pi^2[1+(x_1-\theta)^2][1+(x_2-\theta)^2]}$

$$\ln L=-\ln\pi^2-\ln[1+(x_1-\theta)^2]-\ln[1+(x_2-\theta)^2]$$

得似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2(x_1-\theta)}{1+(x_1-\theta)^2}+\frac{2(x_2-\theta)}{1+(x_2-\theta)^2}$$

$$=\frac{2(x_1+x_2-2\theta)[\theta^2-(x_1+x_2)\theta+x_1x_2+1]}{[1+(x_1-\theta)^2][1+(x_2-\theta)^2]}=0$$

该方程的解有 3 个，为：

$\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$；

$\hat{\theta}_2=\frac{(x_1+x_2)+\sqrt{(x_1-x_2)^2-4}}{2}$；

$\hat{\theta}_3=\frac{(x_1+x_2)-\sqrt{(x_1-x_2)^2-4}}{2}$．

要使 L 达到最大，只要 L 的分母 $g(\theta)=[1+(x_1-\theta)^2][1+(x_2-\theta)^2]$ 达到最小值即可．判断 $\hat{\theta}_i(i=1,2,3)$ 中哪一个是 L 的最大值点．由于(显然) $g'(\hat{\theta}_i)=0\quad(i=1,2,3)$

故 $g''(\theta)=4[\theta^2-(x_1+x_2)\theta+x_1x_2+1]-2(x_1+x_2-2\theta)[2\theta-(x_1+x_2)]$

将 $\hat{\theta}_1$ 代入上式得 $g''\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=-(x_1-x_2)^2+4\cdots\cdots$(甲)．

若(甲)式大于0，即 $(x_1-x_2)^2<4$，$|x_1-x_2|<2$，则 $g(\theta)$ 达到最小值．所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的最大似然估计．

而当 $|x_1-x_2|<2$ 时 $\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3$ 都是复根，它们不是 θ 的最大似然估计．

若(甲)式小于0，则 $|x_1-x_2|>2$，此时 $g''(\hat{\theta}_1)<0$，$g(\hat{\theta}_1)$ 达到最大值，所以 $\hat{\theta}_1$ 不是 θ 的最大似然估计．但此时，$g''(\hat{\theta}_2)=2[x_1+x_2-(x_1x_2+\sqrt{(x_1-x_2)^2-4})]^2>0$，$g''(\hat{\theta}_3)=2[x_1+x_2-(x_1x_2-\sqrt{(x_1-x_2)^2-4})]^2>0$. 故 $\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3$ 都是 $g(\theta)$ 的最小值点，容易证明 $g(\hat{\theta}_2)=g(\hat{\theta}_3)$，此时 $\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3$ 是 θ 的两个最大似然估计．

总之，此例题中似然方程有三个根，即其解不是唯一的，且它们也不一定都是 θ 的最大似然估计，因而需要讨论．

本例 θ 的最大似然估计可写为

$$\hat{\theta}=\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}, & |x_1-x_2|\leqslant 2;\\ \frac{1}{2}[x_1+x_2\pm\sqrt{(x_1-x_2)^2-4}], & |x_1-x_2|>2.\end{cases}$$

显然，当 $|x_1-x_2|=2$ 时，$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 是 θ 的最大似然估计．

4. 试问无偏估计是否总是存在的？

答 无偏估计有时是不存在的．例如：

设总体 X 服从参数为 p 的 0－1 分布．即 X 的分布列为 X_1 是取自该总体的一个样本．可以证明 p^2 不存在无偏估计量．其理由如下：

X	0	1
P	q	p

其中 $0<p<1$ 未知 $q=1-p$

由于 X_1 的分布也是参数为 p 的 0－1 分布．

对参数 p^2，若存在无偏估计 $g(X_1)$，则它必须满足等式：$E[g(x_1)]=p^2$，即对一切 $0<p<1$，都有 $g(1)\cdot p+g(0)(1-p)=p^2$

由于上式左边是未知参数 p 的一次函数（$g(1)$ 和 $g(0)$ 均是常数），而上式右边是 p 的二次函数，因此，对 $0<p<1$ 该等式不可能皆成立．所以，参数 p^2 不存在无偏估计．

5. 从正态总体 $N(\mu,2^2)$ 中抽取容量为 9 的样本，由样本计算得 $\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=15$. 于是得到 μ 的置信度为 0.90 的置信区间为[13.9,16.1]. 这一结果表明区间[13.9,16.1]包含未知参数 μ 的概率为 0.90. 这种说法对吗？

答 这种说法是不对的．

因为区间[13.9,16.1]的两个端点是已知的常数，而 μ 虽然未知，但它是客观存在的某个常数．不是随机变量．也就是说 $(13.9\leqslant\mu\leqslant16.1)$ 不是随机事件．当然 $P\{13.9\leqslant\mu\leqslant16.1\}=0.90$ 是毫无意义的．而区间[13.9,16.1]与 μ 的关系只能有两种情况，要么这个区间包含 μ，要么不包含 μ. 不能说 0.90 是这个特定区间[13.9,16.1]包含参数 μ 的概率．

关于未知参数置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的含义见（[1]，P170）．

6. 设总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 $\mu,\sigma^2>0$ 均未知．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自该总体的样本．试问用枢轴量法求得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$，其平均长度是否最短？

答 该区间是平均长度最短的 μ 的置信区间．

样本函数 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 选取 A,B 使 $P\left\{A\leqslant\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\leqslant B\right\}=1-\alpha$

于是 $P\left\{\bar{X}-B\frac{S}{\sqrt{n}}\leqslant\mu\leqslant\bar{X}-A\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$

已知 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\bar{X}-B\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}-A\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

此区间的平均长度为：

$$E(L)=L=\frac{S}{\sqrt{n}}(B-A). \tag{1}$$

选取 A 与 B，使 L 达最小．

又 $$1-\alpha=P(A<T<B)=F(B)-F(A) \tag{2}$$

这里 $F(t)$ 是 $t(n-1)$ 分布的分布函数．

将(1)式和(2)式对 A 求导得

$$\begin{cases}\dfrac{dL}{dA}=\dfrac{S}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{dB}{dA}-1\right) & (3)\\ f(B)\dfrac{dB}{dA}-f(A)=0 & (4)\end{cases}$$

其中 $f(t)$ 是 $t(n-1)$ 分布的分布密度．将(4)代入(3)式得 $\dfrac{dL}{dA}=\dfrac{S}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{f(A)}{f(B)}-1\right)$，

令 $\dfrac{dL}{dA}=0$ 知，只有当 $f(A)=f(B)$ 时 L 最小，由于 $f(t)$ 曲线是对称单峰的，故要使 $f(B)=f(A)$，只有 $A=B$(舍去)或 $A=-B$，于是由(2)式便得

$$\begin{aligned}F(B)-F(A)&=F(B)-F(-B)\\&=[1-P(T>B)]-[1-P(T>-B)]=1-\alpha\end{aligned}$$

即得 $P(T>-B)-P(T>B)=1-\alpha$

又由 $f(t)$ 对称性，可得 $1-P(T>B)-P(T>B)=1-\alpha$

$$\Rightarrow 1-2P(T>B)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(T>B)=\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore B=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 是自由度为 $n-1$ 的 t 分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数．$A=-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

可见，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的平均长度最短的置信区间就是

$$\left[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

仿照上述分析，可知在 σ^2 已知情况下，区间 $\left[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ 是 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的平均长度最短的置信区间．

四、典型例题

1．设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\theta_1}{x}\right)^{\theta_2}, & x\geqslant\theta_1;\\ 0, & x<\theta_1.\end{cases}$$ 其中参数 $\theta_1>0$ 已知 $\theta_2>0$ 未知，$\theta_2\neq1$.

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自该总体的样本值．

求未知参数 θ_2 的最大似然估计和矩估计．

分析：首先写出总体 X 的概率密度 $f(x;\theta_1,\theta_2)$，再按前面总结的步骤求解．

解 $f(x;\theta_1,\theta_2)=F'(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\theta_2\theta_1^{\theta_2}x^{-(\theta_2+1)}, & x\geqslant\theta_1;\\ 0, & x<\theta_1.\end{cases}$

(1) 样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\theta_2\theta_1^{\theta_2}x_i^{-(\theta_2+1)}=\theta_2^{n}\theta_1^{n\theta_2}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(1+\theta_2)}$$

又 $\ln L=n\ln\theta_2+n\theta_2\ln\theta_1-(1+\theta_2)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

得似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta_2}=\frac{n}{\theta_2}+n\ln\theta_1-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\qquad(\theta_1\text{是已知参数}).$$

解得 $$\hat{\theta}_2=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta_1}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\ln\theta_1)}\text{(是唯一驻点)}$$

又因为$\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{(\mathrm{d}\theta_2)^2}=-\frac{n}{\theta_2^2}<0$

所以 $\hat{\theta}_2$ 是 θ_2 的最大似然估计.

(2) 第一步 $$E(X)=\int_{\theta_1}^{+\infty}x\,\theta_2\theta_1^{\theta_2}x^{-(\theta_2+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\theta_1}^{+\infty}\theta_2\theta_1^{\theta_2}x^{-\theta_2}\mathrm{d}x=\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_2-1}$$

$$\Rightarrow\theta_2=\frac{E(X)}{E(X)-\theta_1}.$$

第二步 $\widehat{E(X)}=\bar{x}$.

第三步 将$\widehat{E(X)}$代入 θ_2 的公式中,得到 $\hat{\theta}_2=\frac{\bar{x}}{\bar{x}-\theta_1}$是 θ_2 的矩估计量.

2. 一个罐子里装有黑球和白球,黑球所占比例为 $p(0<p<1)$未知.每次试验方式是有放回地从中随机地取 N 个球,其中黑球个数是随机变量 X.共进行了 n 次试验,获得样本值 $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$.试求:

(1) p 的最大似然估计.

(2) 罐内黑球数和白球数之比 R 的最大似然估计.

分析

①由题意可知总体 $X\sim B(N,p)$.其中 N 已知,p 未知.为了写出似然函数 L,对离散型随机变量要先写出它的概率函数.

②建立 R 与 p 的函数关系,可用未知参数的已知函数的最大似然估计的规定求 R 的估计.

解 (1) 总体 X 的概率函数为

$f(x;p)=C_N^x\ p^x(1-p)^{N-x},(x=0,1,2\cdots,N)$.

样品 $X_i\sim f(x_i;p)=C_N^{x_i}\ p^{x_i}(1-p)^{N-x_i}\begin{pmatrix}x_i=0,1,2\cdots,N\\ i=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$

似然函数

$$L=\prod_{i=1}^{n}C_N^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{N-x_i}=\left(\prod_{i=1}^{n}C_N^{x_i}\right)p^{\sum\limits_1^n x_i}(1-p)^{nN-\sum\limits_1^n x_i}$$

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln C_N^{x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(nN-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p).$$

得似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum\limits_1^n x_i}{p}-\frac{nN-\sum\limits_1^n x_i}{1-p}=0.$$

解得 $\hat{p} = \dfrac{\sum_{1}^{n} x_i}{nN} = \dfrac{\bar{x}}{N}$ 是唯一驻点．故 $\hat{p}$ 是 p 的最大似然估计．

(2) $\because R = \dfrac{p}{1-p}$ 是 p 的连续函数 $(0<p<1)$，$\hat{p} = \dfrac{\bar{x}}{N}$ 是 p 的最大似然估计．由未知参数的已知函数的最大似然估计规定可知

$\hat{R} = \dfrac{\hat{p}}{1-\hat{p}} = \dfrac{\bar{x}}{N-\bar{x}}$ 是 R 的最大似然估计．

注意：

要分清 N、n 和 x_i 的实际含义：N 是每次试验从总体中抽取个体的个数，是确定的值．n 是进行试验的次数，也是定值．

X_i 是第 i 个样品，它表示第 i 次试验从总体抽取 N 个球中黑球的个数，它是随机变量，可能的取值是 $0,1,2,\cdots,N$．且与总体 X 同分布．而 x_i 是第 i 个样品值，是 X 可能取值之一，并不一定是 i．

3. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，已知 $\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1^2)$，求未知参数 μ 的矩估计和最大似然估计．

分析：首先要写出总体 X 的概率密度，已知 $\ln X \sim N(\mu,1)$ 则 X 服从参数为 $\mu,\sigma=1$ 的对数正态分布，其概率密度为见([1],P55)．

解 $X \sim f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x-\mu)^2}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

第一步 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\mu)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}(\ln x-\mu)^2\right]\mathrm{d}x$

令：$\ln x = t, x = e^t \quad \mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$

$$上式 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^t \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(2\mu+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-\mu-1)^2}\mathrm{d}(t-\mu-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

得 $\mu = \ln E(X) - \dfrac{1}{2}$.

第二步 $\widehat{E(X)} = \bar{X}$ 代入上式

第三步 $\hat{\mu} = \ln\bar{x} - \dfrac{1}{2}$ 是 μ 的矩估计量．

(2) $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的似然函数

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu)^2\right]$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \mu)^2$$

得似然方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\mu} = +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2(\ln x_i - \mu) = 0.$$

解得 $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$. 是唯一驻点

$\therefore\hat{\mu}$ 是 μ 的最大似然估计.

4. 已知总体 X 的分布列为(参数 $0<\theta<1$ 未知).

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是来自该总体的一个样本值,试求 θ 的最大似然估计.

分析 本题关键是由总体 X 的分布列写出 X 的概率函数.

解 $X\sim f(x;\theta)=P(X=x+1)=C_2^x(1-\theta)^x\theta^{2-x},\quad x=0,1,2.$

$X_i\sim f(x_i;\theta)=P(X_i=x_i+1)=C_2^{x_i}(1-\theta)^{x_i}\theta^{2-x_i}\quad x_i=0,1,2.\ i=1,2,\cdots,n.$

$(x_1;x_2,\cdots,x_n)$的似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}C_2^{x_i}(1-\theta)^{x_i}\theta^{2-x_i}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}C_2^{x_i}\cdot(1-\theta)^{\sum_1^n x_i}\theta^{\sum_1^n(2-x_i)}$$

又 $\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln C_2^{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln(1-\theta)+\sum_{i=1}^{n}(2-x_i)\ln\theta$

得似然方程 $\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{\sum_1^n x_i}{1-\theta}+\frac{1}{\theta}(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$

解得 $\hat{\theta}=\frac{2n-\sum_1^n x_i}{2n}=1-\frac{1}{2}\bar{x}$ 是唯一驻点

$\therefore\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计.

5. 设总体 X 的分布密度为

$$f(x;A,B)=\begin{cases}\frac{1}{A}e^{-\frac{x-B}{A}}, & x\geqslant B,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $-\infty<B<+\infty,A>0$; 均是未知参数.

试求 A,B 的最大似然估计.

分析 ①本题没有给出样本值,在解题时应设一个样本值.

②由于似然方程组中$\frac{\partial\ln L}{\partial B}=\frac{n}{A}=0$无解,故要用定义直接求 B 的最大似然估计.

解 设样本值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,它的似然函数是:

$$L=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;A,B)=A^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-B)\right]\right\},\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\geqslant B$$

$$\ln L=-n\ln A-\frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-nB\right]$$

$$\begin{cases}\frac{\partial\ln L}{\partial B}=\frac{n}{A}=0; & (1)\\ \frac{\partial\ln L}{\partial A}=-\frac{n}{A}+\frac{1}{A^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-nB\right]=0 & (2)\end{cases}$$

显然(1)式无解，要用定义求 B 的最大似然估计．

要使 L 达到最大，就是要在 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\geqslant B$ 条件下，选择 B 使 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-B)$ 达到最小，自然应选择 $\hat{B}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$ 为 B 的最大似然估计．

由似然方程(2)解出 $\hat{A}=\dfrac{\sum\limits_{1}^{n}x_i}{n}-\hat{B}$ 是唯一驻点，故知 A 的最大似然估计是 $\hat{A}=\bar{X}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$．

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 $\sigma^2>0$ 都未知．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自该总体的一个样本．若 A 满足 $\int_A^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=0.02$，试求 A 的最大似然估计．

分析 由[1]，例 7.2 可知 $\hat{\mu}=\bar{X}$，$\hat{\sigma}^2=M_2'=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 分别是正态总体 μ 与 σ^2 的最大似然估计．再找出 A 与 μ,σ^2 的函数关系，从而求 A 的最大似然估计．

解 $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.02.$

即 $\Phi\left(\dfrac{A-\mu}{\sigma}\right)=1-0.02=0.98.$

查标准正态分布表，知 $\dfrac{A-\mu}{\sigma}=2.05$

由此得 $A=2.05\sigma+\mu$ 是 σ 和 μ 的连续函数．而 μ 和 σ^2 的最大似然估计分别为 $\hat{\mu}=\bar{X}$，

$\hat{\sigma}^2=M_2'=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$

由未知函数的已知函数的最大似然估计规定知 $\hat{\sigma}=\sqrt{M_2'}$ 是 σ 的最大似然估计．

故 $\hat{A}=2.05\sqrt{M_2'}+\bar{X}$ 是 A 的最大似然估计．

7. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x\leqslant\theta\ (\theta>0\text{ 未知})\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该总体的一个样本值．

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$，

(2) 问 $\hat{\theta}$ 是不是 θ 的无偏估计？并说明理由，

(3) 试构造 θ 的一个无偏估计量．

解 (1) 样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数为 $L=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i, & 0\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\theta;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$\ln L=-2n\ln\theta+n\ln2+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{2n}{\theta}=0$ 无解．故知本题要由定义直接求 θ 的最大似然估计．

从 L 表达式看出，要在 $\theta \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$ 条件下，使 L 达到最大，必须取 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，由定义可知 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计．

(2) 判断 $\hat{\theta}$ 是不是 θ 的无偏估计，就是看 $E(\hat{\theta})=\theta$ 是否成立．为求 $E(\hat{\theta})$，关键是先求 $\hat{\theta}$ 的概率密度．

$\hat{\theta}$ 的分布函数 $G(y)=P\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}\leqslant y\}=\prod\limits_{i=1}^{n}p(X_i\leqslant y)=F^n(y)$（其中 $F(y)$ 是总体 X 的分布函数）.

$\hat{\theta}$ 的概率密度 $g(y)=G'(y)=nF^{n-1}(y)f(y)$.

$$X\sim F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \int_0^x \dfrac{2x}{\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{\theta^2}, & 0\leqslant x<\theta;\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

$$\therefore \hat{\theta}\sim g(y)=\begin{cases}n\left(\dfrac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\dfrac{2y}{\theta^2}, & 0<y\leqslant\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\theta}ny\left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1}\frac{2y}{\theta^2}\mathrm{d}y=\int_0^{\theta}\frac{2n}{\theta^{2n}}y^{2n}\mathrm{d}y=\frac{2n}{2n+1}\theta\neq\theta$$

故知 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 不是 θ 的无偏估计．

(3) 若取 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2n+1}{2n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}=\dfrac{2n+1}{2n}\hat{\theta}$.

$\because E(\hat{\theta}_1)=\dfrac{2n+1}{2n}E(\hat{\theta})=\theta$,

$\therefore$ 只需将 $\hat{\theta}$ 修正为 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2n+1}{2n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$ 就是 θ 的无偏估计量．

8. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中参数 $\mu,\sigma^2>0$ 未知．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该总体的一个样本．试决定 k 使 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|$ 是 σ 的无偏估计量．

分析 要使 $\hat{\sigma}$ 是 σ 的无偏估计，应取系数 k 满足 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，即 $E(\hat{\sigma})=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n}E|X_i-\bar{X}|=\sigma$，其困难在于计算 $E|X_i-\bar{X}|$.

令 $Y_i=X_i-\bar{X}=X_i-\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_{i-1}+X_i+X_{i+1}+\cdots+X_n)$

$$=\frac{n-1}{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{i-1}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}X_k$$

$\because X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立，$i=1,2,\cdots,n$. Y_i 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性组合．由于相互独立的正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量．所以 $Y_i\sim N(E(Y_i),D(Y_i))$，下面只需求出 $E(Y_i),D(Y_i)$.

又如果 $Y_i\sim N(0,D(Y_i))$，则

$$E|Y_i|=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D(Y_i)}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2D(Y_i)}}\mathrm{d}y=2\frac{\sqrt{D(Y_i)}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{D(Y_i)}$$

解 样本取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，故 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

令 $Y_i=X_i-\bar{X}=\frac{n-1}{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{i-1}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}X_k$，

$E(Y_i)=E(X_i-\bar{X})=E(X_i)-E(\bar{X})=\mu-\mu=0.$

$$D(Y_i)=D(X_i-\bar{X})=(\frac{n-1}{n})^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{i-1}D(X_k)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=i+1}^{n}D(X_k)$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$\therefore Y_i=X_i-\bar{X}\sim N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right),i=1,2,\cdots,n.$

$$E|\bar{X}_i-\bar{X}|=E|Y_i|=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D(Y_i)}}e^{-\frac{y^2}{2D(Y_i)}}dy$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{D(Y_i)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma.$$

由 $E(\hat{\sigma})=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\bar{X}|=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$

$$=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n(n-1)}\sigma=\sigma$$

可知当 $k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n(n-1)}$ 时，$\hat{\sigma}$ 是 σ 的无偏估计量．

小结：本题的解法是属于典型性的解法，求解中关键是求随机变量 $Y_i=X_i-\bar{X}$ 的分布，这要用到独立正态随机变量的线性组合仍是正态随机变量．在求其均值和方差时应注意所要求的条件．

9. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 $\mu,\sigma^2>0$ 都未知．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自该总体的样本．试证明 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，是 σ^2 的相合估计量（其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$）．

分析 欲证明 S^2 是 σ^2 的相合估计量，即证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$.

证明 已证明 $E(S^2)=\sigma^2$，可知 S^2 是 σ^2 的无偏估计量．

由费歇定理可知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

故有 $D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)\Rightarrow\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$

即 $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

根据契比雪夫不等式，有

$$P\{|S^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(S^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2(n-1)}\xrightarrow{\text{当 } n\to\infty}0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|\geqslant\varepsilon\}=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1.$

所以 S^2 是 σ^2 是相合估计量．

10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 为已知常数，$\sigma^2>0$为未知参数．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自该总体的样本．$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 和 $S_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 都是 σ^2 的估计量，试比较它们的有效性．

分析 容易验证 S^2 和 S_0^2 都是 σ^2 的无偏估计，比较它们的有效性就是比较它们的方差大小．

解 由[1]，定理 6.1 知 $E(S^2)=\sigma^2$.

$$E(S_0^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\sigma^2$$

故 S^2 和 S_0^2 都是 σ^2 的无偏估计量．．

又由 χ^2 分布定义知 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，

由费歇定理可知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

所以 $D(S_0^2)=\frac{\sigma^4}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}$

$$D(S^2)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left[\frac{\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\right]=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

故有 $D(S_0^2)=\frac{2\sigma^4}{n}<\frac{2\sigma^4}{n-1}=D(S^2)$，于是 S_0^2 比 S^2 有效．

注意：如果估计量不都是无偏估计量，欲比较它们的有效性要用[1]定义 7.3．见[1]例 7.12．

11. 假定到某地旅游的一个游客的消费额 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $\sigma=500$，μ 未知．要对平均消费额 μ 的进行估计，使这个估计的绝对误差小于 50 元，且为使置信度不小于 0.95，问至少需要随机调查多少个游客？

分析 本题是求样本容量的最小值，因此，不妨设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自该总体的样本．样本均值为 $\bar{X}$，且知 $\hat{\mu}=\bar{X}$，依题意，即可由 $P\{|\bar{X}-\mu|<50\}\geqslant=0.95$ 去求最小样本容量 n.

解 设 n 是至少需要随机调查的游客人数．

要 $P\{|\bar{X}-\mu|<50\}\geqslant 0.95$，

即 $P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{50}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}\geqslant 0.95$，

因为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=u\sim N(0,1)$，

由 $P\{|u|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha=0.95$．其中 $\alpha=0.05$．

得 $\frac{50}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant u_{\frac{0.05}{2}}=1.96$

$\Rightarrow\sqrt{n}\geqslant\frac{1.96\sigma}{50}$

$\Rightarrow n \geqslant \left(\frac{1.96\sigma}{50}\right)^2 = \left(\frac{1.96\times 500}{50}\right)^2 = 384.16.$

就是说随机调查游客人数不少于 385 人，就有不小于 0.95 的把握，使得用调查所得的 $\bar{x}$ 去估计平均消费额的真值 μ 时，其绝对误差小于 50 元 .

12. 某商店为了解用户对某种商品的需要量，调查了 100 个用户，得出每户每月平均需要该商品 10 公斤 . 根据经验得知用户需求量方差 $\sigma_0^2 = 9$ 公斤^2. 如果这个商店供应一万户，就用户对这种商品的平均需求量 μ 进行区间估计 .$(1-\alpha=0.99)$. 并依此求至少需准备多少公斤此种商品才能以 0.99 的概率满足用户需要?

分析 本题不是正态总体 . 由于样本容量 $n=100$ 较大 . 可用大样本方法求未知参数的区间估计 . 即由独立同分布的中心极限定理得知，总体近似服从 $N(E(X),D(X))$，且由条件可知 $E(X)=\mu, D(X)=9$. 再用枢轴量法求出其置信区间 .

解 设对该商品的需求量为 X，由于 $n=100$ 较大，故 X 近似服从正态分布 $N(\mu,3^2)$.

随机变量$\frac{\bar{X}-\mu}{3/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$可作为枢轴变量 . 于是，有 $P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{3/10} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$.

可得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{3}{10}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{3}{10}\right].$$

已知：$\bar{x}=10$，故 μ 的 0.99 的置信区间是：

$$\left[10-2.58\,\frac{3}{10}, 10+2.58\,\frac{3}{10}\right] = [9.226, 10.774]$$

由题意可知一万户对该种商品的平均需求量的 0.99 的置信区间是：

$[10000\times 9.226, 10000\times 10.774] = [92260, 107740]$.

又由题意要满足：

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{3/10} \leqslant u_{0.01}\right\} \approx 0.99,$$

可得 μ 的 0.99 的置信区间$[\bar{x} - U_{0.01}\frac{3}{10}, +\infty]$即$\left[10-2.33\,\frac{3}{\sqrt{10}}, +\infty\right) = [9.301, +\infty)$

可知对一万户最少需要准备 $10000\times 9.301 = 93010$ 公斤这种商品，才能以 0.99 的概率满足需要 .

注：本题第一问是对期望 μ 作双侧区间估计，而第二问是对 μ 作单侧区间估计 .

13. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_8)$是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中参数 μ 和 $\sigma>0$ 未知 . 设 L 是 μ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间长度 . 试求 $E(L^2)$.

解 总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

选取随机变量$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$为枢轴变量 .

给定置信度 $1-\alpha=0.95$

使 $p\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{S}\sqrt{n} \leqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

可得 μ 的置信区间为$\left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$,

故 $L = \frac{2S\,t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n}}$,

$$E(L^2)=\frac{4t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}{n}E(S^2)=\frac{4t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}{n}\sigma^2=\frac{4t_{0.025}^2(7)}{8}\sigma^2=\frac{4\times(1.8946)^2}{8}\sigma^2=1.7948\sigma^2.$$

14. 选择题(每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$N(0,\sigma^2)$的样本,可以作为σ^2的无偏估计量的统计量是　　答(　　)

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$;　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$;　(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;　(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$

分析:本题考查未知参数无偏估计的概念.

由于 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[D(X)+E^2(X)]=\sigma^2.$

答　应选(A)

(2) 设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,其中$\mu,\sigma^2>0$均未知.若样本容量n和样本值不变.则总体均值μ的置信区间长度L与置信度$1-\alpha$的关系是

(A)　当$1-\alpha$缩小时,L增大;

(B)　当$1-\alpha$缩小时,L缩短;

(C)　当$1-\alpha$缩小时,L不变;

(D)　以上三个选项都不对.

答:(　　)

分析　当正态总体,σ^2未知时,μ的$1-\alpha$的置信区间为$[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)S/\sqrt{n},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)S/\sqrt{n}]$,其区间长度$L=2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)S/\sqrt{n}$,当$n$和样本值一定时,由于$1-\alpha$缩小,$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$变小,故$L$缩短.

答　应选(B)

15.　填空题

(1) 设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,μ未知,$\sigma^2>0$已知.为使总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间长度不大于L,则样本容量n至少应取__________.

分析　正态总体,已知方差,均值μ的$1-\alpha$的置信区间是$\left[\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$,

要区间长度　$2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant L$　则 $n\geqslant\frac{4\sigma^2(u_{\frac{\alpha}{2}})^2}{L^2}$.

答　应填$\frac{4\sigma^2(u_{\frac{\alpha}{2}})^2}{L^2}$

(2) ([1].7.21)已知总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,当样本容量$n\geqslant50$时,样本标准差

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$近似服从$N\left(\sigma,\frac{\sigma^2}{2n}\right)$分布,则标准差$\sigma$的置信度为$1-\alpha$的置信区间是__________.

分析　由已知条件,当$n\geqslant50$时,$E(S)=\sigma$,可知S是σ的无偏估计,随机变量$\frac{S-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$可选作枢轴变量,给定$1-\alpha$,要使

$$P\left\{\frac{|S-\sigma|}{\sigma/\sqrt{2n}} \leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha,$$

可得 $P\left\{\frac{S}{1+u_{\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{2n}} \leqslant \sigma \leqslant \frac{S}{1-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}}\right\} = 1-\alpha.$

答 应填 $\left[\frac{S}{1+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}}, \frac{S}{1-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}}\right]$.

五、习题与答案

习　题

1. 单项选择题．

(1) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 已知，μ 未知．如果样本容量 n 和置信度 $1-\alpha$ 都不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 μ 的置信区间的长度：

(A) 变长；(B) 变短；(C) 不变；(D) 不能确定．

答：(　　)

(2) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，要使 $k\sum\limits_{i=1}^{n-1}|X_{i+1}-\mu|$ 是 σ 的无偏估计量，则 K 等于

(A) $\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$；(B) $\dfrac{1}{n-1}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$；(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$；(D) $\dfrac{1}{n}$

答：(　　)

2. 填空题

(1) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该总体的样本，a,b 为常数，且 $0<a<b$，则随机区间 $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{b},\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{a}\right]$ 长度的数学期望为__________．

(2) 设总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\mu,\sigma>0$ 都未知．$(x_1,x_2,\cdots,x_{15})$ 是取自该总体的样本，计算得 $\sum\limits_{i=1}^{15}x_i=8.7$，$\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2=25.05$，则 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间是____________________．

(3) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\sigma>0$ 未知．要使估计量 $\hat{\sigma}^2=k\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，则 $k=$____________________．

3. 设总体 X 在 $[0,\theta]$（$\theta>0$ 未知）上服从均匀分布，从该总体中任取六个样品，测得样本值为：(1.9, 0.5, 1.7, 2.2, 0.3, 1.1)．分别用矩估计法和最大似然估计法求总体均值 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 的估计值．

4. 设总体 X 的概率密度为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}}, & x>0 \quad \text{其中参数 } \theta>0 \text{ 未知；}\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为取自该总体的样本值．试求参数 θ 的最大似然估计．

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 μ 和 $\sigma>0$ 未知，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是取自该总体的样本值．试求标准差 σ 和二阶原点矩 $E(X^2)$ 的最大似然估计．

6. 设总体 X 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{B+1}{6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{B-2}{3}}, & 0<x<2, \quad (B>-1);\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是该总体的一样本,求未知参数 B 的最大似然估计．

7. 设总体 X 的概率密度为:

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x>\theta_1,\quad (\theta_2>0,-\infty<\theta_1<+\infty\text{都未知});\\ 0, & x\leqslant\theta_1.\end{cases}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是该总体的样本值,求未知参数 θ_1 和 θ_2 的矩估计．

8. 袋中装有黑、白二种颜色而大小、形状相同的球．每次从中任取一球,确定黑、白颜色后再放回,连取 100 次．发现其中 9 次取的是黑色球,91 次取的是白色球．试求袋中黑球所占比例 p 和黑球与白球之比 R 的最大似然估计．

9. 总体 X 的概率密度为:

$$f(x;a,b)=\begin{cases}b, & a<x<a+\dfrac{1}{b},\qquad (b>0);\\ 0, & \text{其它},\qquad \text{参数 } a,b \text{ 都未知}.\end{cases}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是来自该总体的样本值,试求参数 a,b 的矩估计．

10. 设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2),(\sigma>0)$．求常数 k 使 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}|X_{i+1}-X_i|$ 为 σ 的无偏估计量．

11. 设总体 X 的均值 μ 和方差 $\sigma^2>0$ 都存在,又$(X_{11},X_{12},\cdots,X_{1n})$与$(X_{21},X_{22},\cdots,X_{2m})$是取自该总体的两个独立样本．试求常数 k 使 $S^2=k\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2+\sum_{i=1}^{m}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2\right]$是 σ^2 的无偏估计．其中 $\bar{X}_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}$,$\bar{X}_2=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_{2i}$.

12. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自二项分布 $B(N,p)$总体的样本．参数 $N(>1)$已知,$p(0<p<1)$未知．试求 p^2 的无偏估计量．

13. 设总体 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geqslant 0(\theta>0);\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自该总体的样本,试证明样本均值 $\bar{X}$ 是参数 θ 的无偏和相合估计量．

14. 从一批炮弹中随机地抽取9发作炮口速度试验,得样本方差 $S^2=11$(米/秒)^2. 假设炮口速度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 试求炮口速度的标准差 σ 和方差 σ^2 的置信度为 0.90 的置信区间．

15. 已知某地区每月每户收入的分布为正态分布．标准差 $\sigma=100$(元). 今要对该地区每户的平均收入进行估计．为了能以 0.95 的概率确信这种估计误差会小于 20(元),则所需样本容量 n 应为多大?

16. 从一大批产品中抽取样本容量为100的样本,经检验发现有 16 个次品,试求这种产品次品率 p 的置信度为 0.95 的置信区间．

17. 为了比较两批灯泡寿命,从标有商标 A 的一批灯炮中任取 150 只灯泡,测量得知其样本平均值 $\bar{X}=1400$ h,样本标准差 $s_1=120$ h. 从标有商标 B 的一批灯泡中任取 100 只灯泡,测量得知其样本均值 $\bar{y}=1200$ h,样本标准差 $s_2=80$ h. 试求两批灯泡平均寿命之差 $\mu_1-\mu_2$ 的 0.99 的置信限(设灯泡寿命均服从正态分布).

18. 甲、乙两位化验员，他们独立地对某种聚合物的含氯量用相同的方法各自作了10次测定，其测定值的样本方差分别为 $s_1^2=0.5419$，和 $s_2^2=0.6065$. 甲和乙测量数据的总体服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，μ_1、μ_2 未知，求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间．

答案与提示

1. (1) 提示：正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 为已知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间长度是：$L=2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 与样本值无关．

答：应选 C

(2) 提示：$\because\ k\sum_{i=1}^{n-1}E|(X_i-\mu)|$ 关键是求 $E|(X_i-\mu)|$，易知 $X_i-\mu=Y_i$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，故知

$$E|X_i-\mu|=E|Y_i|=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

答：应选 B

2. (1) 答：应填 $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)n\sigma^2$

(2) 答：应填 (0.7659, 3.5537)

(3) 提示：$E(k\sum_{1}^{n}X_i^2)=k\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=k\sum_{i=1}^{n}[D(X)+E^2(X)]=k\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=kn\sigma^2=\sigma^2$

答：应填 $\frac{1}{n}$

3. 答：矩法估计值：$\widehat{E(X)}=\bar{x}=1.28$，$\widehat{D(X)}=M_2'=0.5014$，

$\because\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\max\limits_{1\leq i\leq 6}\{x_i\}=2.2$.

而 $\widehat{E(X)}=\frac{\hat{\theta}}{2}=1.1$ 是 $E(X)$ 的最大似然估计，又 $\widehat{D(X)}=\frac{\hat{\theta}^2}{12}=\frac{2.2^2}{12}=0.403$ 是 $D(X)$ 的最大似然估计．

4. 答：$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}}$．

5. 提示：$\because\sigma=\sqrt{\sigma^2}$，$E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$．$\therefore$ 由 σ^2 和 μ 的最大似然估计可知 $\hat{\sigma}$，$\widehat{E(X^2)}$

答：$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\sqrt{M_2'}$　　$\widehat{E(X^2)}=M_2'+(\bar{X})^2$

6. 答：$\hat{\beta}=-\dfrac{3n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{2}}-1$.

7. 提示：(1) 由于 $f(x;\theta_1,\theta_2)$ 是当 $x>\theta_1$ 时有非 0 值，故求 $E(X)$ 时注意定积分的下限应是 θ_1，即 $E(X)=\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{x}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}dx=\theta_1+\theta_2$　　…(甲)

(2) 由于是求二个未知参数的矩估计，故应再建立一个方程．

$$E(X^2)=\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}dx=(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2 \quad \cdots(乙)$$

由$\left\{\begin{array}{l}甲\\乙\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\theta_1=E(X)-\sqrt{D(X)}, & 又:\ \hat{D}(X)=S_n^2;\\ \theta_2^2=E(X^2)-E^2(X)=D(X), & \hat{E}(X)=\bar{X}.\end{array}\right.$

答:$\hat\theta_2=\sqrt{M_2'}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 是 θ_2 的矩估计.

$\hat\theta_1=\bar{X}-\sqrt{M_2'}$ 是 θ_1 的矩估计.

8. 提示:本题难点是没有给出总体的分布和样本.

由题意可知总体 X 服从参数为 p 的 0-1 分布,样品

$$x_i=\begin{cases}1,第\ i\ 次取到黑球\\ 0,第\ i\ 次取到白球\end{cases}\qquad i=1,2\cdots,100$$

已知样本值$(x_1,x_2,\cdots,x_{100})$其中有 9 个 x_i 等于 1,有 91 个等于 0.

所以该问题是求参数为 p 的 0-1 分布总体的参数 p 的最大似然估计.

又可利用关系 $R=\frac{p}{1-p}$ 求其最大似然估计.

答:$\hat{p}=0.09$ 是 p 的最大似然估计值,$\hat{R}=\frac{0.09}{0.91}\approx\frac{1}{10}$.

9. 答:$\hat{b}=\frac{\sqrt3}{6S_n}$.　　其中 $S_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$,

$\hat{a}=\bar{x}-\sqrt3 S_n$.

10. 提示:独立正态随机变量之差仍服从正态分布.故 $X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$.

又如果 $X\sim N(0,\sigma^2)$,则 $E(X)=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$

所以　$E|X_{i+1}-X_i|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2}\sigma=2\frac{\sigma}{\sqrt\pi}$.

答:当 $k=\frac{2(n-1)}{\sqrt\pi}$ 时,$\hat\sigma$ 是 σ 的无偏估计量.

11. 答:$k=\frac{1}{m+n-2}$.

12. 提示:欲求的是 p 的平方的无偏估计量,因此首先应考虑含有 p^2 的二阶原点矩:$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$,又由于 $E(X)=Np$,$D(X)=Np(1-p)$,故 $E(X^2)=Np(1-p)+(Np)^2=Np+N(N-1)p^2$,或写为 $E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=N(N-1)p^2$

由上式可启发选取估计量 $W=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-X_i)/nN(N-1)$使 $E(W)=p^2$.

答:$W=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-X_i)/nN(N-1)$是 p^2 的无偏估计量.

13. 提示:$E(X)=\theta$,而 $E(\bar{X})=E(X)=\theta$,故 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

又 $D(X)=\theta^2, D(\bar{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$,由契比雪夫不等式,可证出 $\bar{X}$ 是 θ 的相合估计

14. 答:σ^2 的 0.90 的置信区间是[5.675,32.199]

σ 的 0.90 的置信区间是[2.382,5.674]

15. 答:$n=97$

16. 提示:该总体不是正态总体,由于样本容量 $n=100$ 很大,可用大样本方法,求参数 p 的区间估计,见([1]P176)

答:[0.101,0.244]

17. 答:置信下限 $A=167.4$ h. 置信上限 $B=232.6$ h

18. [0.2810,2.8413]

第八章　假设检验

一、基本要求

① 理解假设检验的基本思想，知道假设检验可能产生的两类错误，掌握假设检验的基本步骤.

② 掌握一个正态总体均值与方差和两个正态总体均值差与方差比的假设检验方法.

③ 掌握关于总体分布的假设检验方法 ——X^2 检验法.

二、内容提要

1. 假设检验的基本思想和基本概念

① 假设检验问题.

假设检验又称统计假设检验."假设"是指根据经验及知识或者问题的目的和要求，提出有关总体分布的一个命题."假设"是否正确，需要判断.利用从该总体中抽取的样本，用数理统计的方法判断假设是否正确，称为检验.

在数理统计中，把需要检验的假设称为零假设或原假设，记作 $H_0:\cdots$.与原假设对立的假设，称为对立假设或备择假设，记作 $H_1:\cdots$.在[1]中，约定备择假设是零假设对立面的全体.故可以只写出原假设 $H_0:\cdots$.如果 H_0 可以用有限个实参数来描述，则称为参数假设，否则称为非参数假设.如果 H_0(或 H_1) 只包含一个分布，则称 H_0(或 H_1) 为简单假设，否则是复合假设.

怎样根据样本值对原假设 H_0 进行检验呢?这要有一个检验法.所谓检验法就是对所有可能的样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(n 固定) 组成的集合 S 的一个划分：$S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \phi$，当样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in S_1$ 时，拒绝 H_0，当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in S_2$ 时，接受 H_0.称 S_1 为该检验的拒绝域或否定域.S_2 称为接受域.每一个检验法对应一个拒绝域.反之，任给定 S 的一个子集 W，则存在唯一的检验法以它为拒绝域.所以，常把检验法与拒绝域等同起来.

② 假设检验的基本思想是：具有概率性质的反证法.可见[1]，P183.

2. 假设检验的一般步骤

① 根据实际情况提出检验假设 H_0 和备择假设 H_1.

② 选择检验统计量 $Z(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，并在 H_0 成立的条件下已知 Z 的分布.

③ 对于给定的显著水平 $\alpha(0<\alpha<1)$，根据检验统计量的分布，查出检验 H_0 的临界值，从而推出 H_0 的拒绝域 W_0.

④ 根据样本值作出判断：当样本值属于 H_0 的拒绝域 W_0 时，则拒绝 H_0.当样本值属于 H_0 的接受域 $W_1 = \overline{W}_0$ 时，则 H_0 相容.

3. 检验的风险 —— 两类错误

当 H_0 为真时，检验作出拒绝 H_0 的推断，称为犯第一类错误或称以真为假错误；当 H_0 不真

时，检验作出接受 H_0 的推断，称为犯第二类错误或称犯以假为真错误.

由于 $\alpha = P\{$小概率事件发生 $| H_0$ 成立$\}$

$= P\{$拒绝 $H_0 | H_0$ 成立$\}$

故犯第一类错误的概率是 α.

由于 $\beta = P\{$接受 $H_0 | H_0$ 不成立$\}$

故犯第二类错误的概率是 β.

两类错误都会给工作带来损失.人们自然希望 α 和 β 都越小越好.可以证明：在样本容量 n 和样本值确定的条件下，当 α 减小时，β 一般会增大，反之亦然.在一般情况下，主要控制 α.假设检验问题常是给定显著水平 α，当 α 较小时，在 H_0 成立的条件下拒绝 H_0 较困难，起到了保护 H_0 的作用.α 一般取 0.01,0.025,0.05,0.10 等.在实际工作中，α 的大小，要由各方协商确定.

需要指出：α 和 β 不是对立事件的概率，是两个不同条件下不同事件的条件概率.

4. 正态总体参数的假设检验问题

现将常用的一些检验法列成表 1 和表 2.

表 1：$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本.$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

表 2 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n1})$ 是取自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本.$\overline{X}$，S_1^2 分别是样本均值和样本方差.

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n2})$ 是取自总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，$\overline{Y}$ 与 S_2^2 分别是样本均值与样本方差.并且两个样本是相互独立的.

表中 $$S_W = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

表 1：单个正态总体参数的各种检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	条件	检验统计量及其分布	在 α 下，H_0 的拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sigma_0 > 0$ μ_0 已知	$u = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\lvert\overline{X}-\mu_0\rvert}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sigma_0 > 0$ μ_0 已知		$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_\alpha$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < -u_\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sigma_0 > 0$ 未知 μ_0 已知	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\frac{\lvert\overline{X}-\mu_0\rvert}{S/\sqrt{n}} > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sigma_0 > 0$ 未知 μ_0 已知		$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 未知 σ_0^2 已知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

续表

原假设 H_0	备择假设 H_1	条件	检验统计量及其分布	在 α 下,H_0 的拒绝域
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	μ 未知 σ_0^2 已知		$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	μ 已知 σ_0^2 已知	$\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	μ 已知 σ_0^2 已知		$\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n)$
$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$\frac{\sum_1^n(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n)$

表 2:两个相互独立的正态总体参数的各种检验法

H_0	H_1	条　件	检验统计量及其分布	在 α 下,H_0 的拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\sigma_1^2\sigma_2^2$ 已知	$u = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1^2)$	$\lvert u \rvert > u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$	$\mu_1 - \mu_2 > 0$	同上		$u > u_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \geqslant 0$	$\mu_1 - \mu_2 < 0$	同上		$u < -u_\alpha$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 未知 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\lvert T \rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
$\mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$	$\mu_1 - \mu_2 > 0$	同上		$T > t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\mu_1 - \mu_2 \geqslant 0$	$\mu_1 - \mu_2 < 0$	同上		$T < -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	μ_1,μ_2 未知	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	同上		$s_1^2/s_2^2 > F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	同上		$s_1^2/s_2^2 < F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	已知 μ_1,μ_2	$F = \frac{\sum_1^m(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_1^n(Y_j-\mu_2)/n_2} \sim F(n_1,n_2)$	$F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$

H_0	H_1	条　件	检验统计量及其分布	在 α 下，H_0 的拒绝域
$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	同上		$F > F_\alpha(n_1, n_2)$
$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	同上		$F < F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$

4. 皮尔逊 χ^2—— 检验法(略) 见[1]P105.

三、典型例题

1. 选择题(每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内).

(1) 在对总体参数的假设检验中，若给定显著性水平为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，则犯第一类错误的概率是

(A)$1-\alpha$；　(B)α；　(C) $\frac{\alpha}{2}$；　(D) 不能确定 .　　答(　)

答　应选 B.

(2) 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，对数学期望 μ 进行假设检验. 如果在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下接受了 $H_0: \mu = \mu_0$，那么在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下.

(A) 必接受 H_0；　(B) 可能接受也可能拒绝 H_0；

(C) 必拒绝 H_0；　(D) 不接收也不拒绝 H_0. 答　(　)

分析　若 σ^2 已知，在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 $H_0: \mu = \mu_0$，即统计量 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的值落在 H_0 接收域 $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant u_{\frac{0.05}{2}}$ 内.

$$\because u_{\frac{0.01}{2}} > u_{\frac{0.05}{2}} \qquad \therefore \left\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant u_{\frac{0.01}{2}}\right\} \supset \left\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant u_{\frac{0.05}{2}}\right\}.$$

故在 $\alpha = 0.01$ 下，样本值定落入 H_0 的接受域，所以接受 H_0.

若 σ^2 未知，也可仿上进行讨论，得到同样的结论.

答　应选 A.

2. 一个矩形的宽与长之比为 0.618 会给人们一个美好的感觉. 某厂生产的矩形工艺品，其框架的宽与长之比 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$\mu, \sigma^2 > 0$ 均未知. 现随机抽取 20 个产品测量其比值为 $(x_1, x_2, \cdots, x_{20})$，经计算得 $\sum_{i=1}^{20} x_i = 13.466$，$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 9.267$. 能否认为 X 的均值 μ 为 0.618?($\alpha = 0.05$).

解　(1) 提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 0.618$，　$H_1: \mu \neq 0.618$.

(2) 选取检验统计量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(3) 对给定的 α.

H_0 的拒绝域为：$\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

(4) 查表知 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(19) = 2.093$

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 0.673,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{19}(9.267 - 20 \times 0.673^2) = 0.011,$$

$$S = 0.105,$$

故 $|T_0| = \dfrac{|0.673 - 0.618|}{0.105/\sqrt{20}} = \dfrac{0.055}{0.023} = 2.391.$

根据样本值计算的结果有 $|T_0| = 2.391 > 2.093 = t_{\frac{0.05}{2}}(19)$.

于是在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0,认为 $\mu \neq 0.618$.

注意:本题条件中没有给出各个样品值,在计算样本方差时,要用到一个恒等式

$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$ 该式应当熟记,以后会经常用到.

3. 设某种型号玻璃纸的横向延伸率(%)X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$\mu,\sigma^2 > 0$ 均未知.按规定 X 的均值 μ 不得低于 65,否则就是不合格品,现从其中一批产品中任取 60 个,测得数据如下表:

横向延伸率(%)	47.5	49.5	51.5	53.5	55.5	57.5	59.5	61.5	67.5
频数 n_i	17	14	5	3	2	12	2	4	1

试问这批玻璃纸在 $\alpha = 0.05$ 显著水平下是否合格?

本题所给条件是样本取值 x_i 和取值的频数 $n_i(i = 1,2,\cdots,k)$.容易证明:$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$,

$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2$,其中 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

解 (1) 提出假设 $H_0: \mu \geqslant \mu_0 = 65, H_1: \mu < 65$.

(2) H_0 的拒绝域为:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1) = -t_\alpha(n-1).$$

(3) 查表知. $t_{0.95}(59) = -t_{0.05}(59) = -u_{0.05} = -1.65$,

$$\bar{x} = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{9} n_i x_i = 52.53,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 = 25.82,$$

$$T_0 = \frac{52.53 - 65}{\sqrt{25.82/60}} = -19.01.$$

(4) 根据样本值计算的结果有:

$T_0 = -19.01 < -t_{0.05}(9) = -1.65$

所以拒绝 H_0,在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,认为这批玻璃纸不合格.

4. 某厂生产的蓄电池使用寿命 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$\mu,\sigma^2 > 0$ 均未知.该产品说明书上写明其标准差不超过 0.9 年.现随机抽取 10 只,得样本标准差为 1.2 年.试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下检验厂方说明书上所写的标准差是否可信?

解　(1) 提出假设 $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 = 0.9^2, H_1: \sigma^2 > 0.9^2$.

(2) H_0 的拒绝域是 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)$.

(3) 查表 $\chi_{0.05}^2(9) = 16.919$.

计算 $\chi_0^2 = \frac{(10-1)1.2^2}{0.9^2} = 16$.

(4) 根据样本值计算结果 $\chi_0^2 = 16 \not> \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$,所以 H_0 相容,在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,认为厂方说明书上写的标准差是可信的.

5.　某工厂用柱塞式填装机将胶水装入容量为 250 mL 的瓶内,每瓶内胶水量是随机变量 X.假设 X 服从正态分布 $N(\mu, 5^2)$.现在研制一种新的填装机器其装速比原来机器装速明显加快.现从用新机器所装的胶水中任取 45 瓶,测量知其胶水量为 $(x_1, x_2, \cdots, x_{45})$,经计算得 $\sum_{i=1}^{45}(x_i - \bar{x})^2 = 794.75$.试检验用新机器投入生产,标准差是否有显著减小?($\alpha = 0.10$).

解　(1) 提出假设 $H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 = 5^2, H_1: \sigma^2 < 5^2$.

(2) H_0 的拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$.

(3) 查表知 $\chi_{0.90}^2(44) = 32.487$.

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_1^{45}(x_i - \bar{x})^2}{5^2} = \frac{794.75}{25} = 31.79.$$

(4) 根据样本值计算结果 $\chi_0^2 = 31.79 < \chi_{0.90}^2(44) = 32.487$,所以拒绝 H_0,在显著水平 $\alpha = 0.10$ 下,认为用新机器投入生产,标准差有显著减小.

6.　设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,$\mu, \sigma^2 > 0$ 都未知.$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是该总体的样本.检验 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

选取统计量 $T = k_1 \frac{\sum_1^n X_i - n\mu_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\sum_1^n \chi_i^2 - n\overline{\chi}^2)}}$.

(1) 当 H_0 成立时,确定常数 k_1, k_2,使 T 服从参数为 k_2 的 t 分布,并加以证明.

(2) 写出此假设检验的一般检验步骤(给定显著水平 α).

分析:由于 T 的分子变形是 $\overline{X}$ 的函数,其分母根号内变形 $\frac{1}{n}(\sum_1^n X_i^2 - n\overline{X}^2) = \frac{n-1}{n}S^2$ 是 S^2 的函数,用费歇定理和 t 分布定义,容易证出(1).

解　(1) 当 $H_0: \mu = \mu_0$ 成立时,$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

由费歇定理可知

又 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_1^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,且由 $\overline{X}$ 与 S^2 独立.

可知 u 与 W 独立,

又由 t 分布定义，知道

$$\frac{u}{\sqrt{W/n-1}} = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n(n-1)}}} \sim t(n-1),$$

而 $T \xlongequal{\text{变形}} k_1 \dfrac{n(\overline{X}-\mu_0)}{\sqrt{n-1}\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n(n-1)}}}$ 与上式比较，

可以知道当 $k_1 = \dfrac{\sqrt{n-1}}{n}$ 时 $T \sim t(n-1)$ 即 $k_2 = n-1$.

(2)① 提出假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$.

②H_0 的检验统计量为

$$T = \frac{\sqrt{n-1}}{n}\frac{\sum\limits_{1}^{n}X_i - n\mu_0}{\sqrt{\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2)}} = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

③ 给定显著水平 α，H_0 的拒绝域为 $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

④ 查表知 $t_\alpha(n-1)$，由样本值计算 T_0.

根据样本值作出判断：

如果 $|T_0| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则拒绝 H_0；

如果 $|T_0| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则 H_0 相容.

7. 某公司营销空调产品，四月份在 3000 个销售对象中，有 40% 的销售对象提出增加空调订货计划. 到了六月份，这一比例看来又有增加迹象. 为此营销部任选 384 个销售对象作调查，其中 184 个明确提出增加订货计划. 问空调订货计划有无显著增加($\alpha = 0.01$)?

分析

(1) 由题意知四月份空调增加订货计划的概率为 $p_0 = 0.40$. 问六月份增加订货计划 p 是否有增加，即问 $p > p_0$ 是否成立. 为得到有说服力的判断，可提出假设 $H_0: p \leqslant p_0$.

(2) 该问题是非正态总体. 由于样本容量 $n = 384$，可视为很大. 可用大样本方法解决此问题. 由德莫佛 - 拉普拉斯定理可知

当 $n > 50$ 近似地有：

$$V = \frac{m - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \sim N(0,1).$$

本题 $m = 184$, $n = 384$, $p_0 = 0.40$.

解 (1) 提出假设 $H_0: p \leqslant p_0 = 0.4$. $H_1: p > p_0$.

(2) 给定 α，由 $p\left\{\dfrac{m-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_\alpha\right\} \leqslant \alpha$,

可知 H_0 的拒绝域为 $\dfrac{m-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_\alpha$.

(3) 由样本值计算 $V_0 = \dfrac{184 - 384 \times 0.4}{\sqrt{384 \times 0.4 \times 0.6}} = 3.17$.

查表知 $u_{0.01} = 2.39$.

(4) 根据样本值计算结果 $u_0 = 3.17 > u_{0.01} = 2.39$,所以拒绝 H_0.在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下认为 $p > 0.4$.即六月份空调订货计划比四月份有明显增加.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, 4^2)$ 的样本.其中 μ 未知,检验假设 $H_0: \mu \leqslant \mu_0$. $H_1: \mu > \mu_0$.若 H_0 的拒绝域为 $\overline{X} - \mu_0 > C$.试确定常数 C,使检验的显著水平为 $\alpha = 0.05$.

解 因为在显著水平 α 下,H_0 的拒绝域为

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > u_\alpha \text{即} \overline{X} - \mu_0 > u_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

与已知 $\overline{X} - \mu_0 > C$ 比较,可知

$$C = u_\alpha \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = u_{0.05} \frac{4}{\sqrt{25}} = 1.65 \times \frac{4}{5} = 1.32$$

所以当 $C = 1.32$ 时,可使检验的显著水平为 $\alpha = 0.05$.

9. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 2^2)$, $(x_1, x_2, \cdots, x_{16})$ 是该总体的一个样本值.已知假设 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$ 在显著水平为 α 时的拒绝域是 $|\overline{X}| > 1.29$,其中 $\overline{X} = \dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i$ 是样本均值.问此检验的显著水平 α 的值是多少?犯第一类错误的概率又是多少?

分析 H_0 的检验统计量为 $\dfrac{\overline{X} - 0}{2/\sqrt{16}} \sim N(0,1)$ 若给定 α,有 $P\left\{\dfrac{|\overline{X}|}{2/4} > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$.

解 $\because P\left\{\dfrac{|\overline{X}|}{2/4} > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = P\left\{2|\overline{X}| > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$,

又已知 $P\{|\overline{X}| > 1.29\} = P\{2|\overline{X}| > 2.58\} = \alpha$,

$\therefore u_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

又 $\Phi(2.58) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.995$,故知 $\alpha = 0.01$.

所以此检验的显著水平 $\alpha = 0.01$,犯第一类错误的概率也是 0.01.

10. 在山南山北同时种下同一品种树苗,若干天后,分别抽取两个独立的苗高样本.得数据(单位:cm)如下:

山南苗高 X:68,80,67,72,74,69,80,75,　　山北苗高 Y:66,64,70,58,69,70,75,72.

资料表明,山南山北苗高 X, Y 都服从正态分布且方差相等,试问是否可以认为山南苗高显著高于山北苗高?($\alpha = 0.05$)

分析 据经验山北苗高大于山南苗高实属少见.为立足拒绝 H_0,可作如下假设检验.

解 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$.

(1) 提出假设 $H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2$　　$H_1: \mu_1 > \mu_2$.

(2) 对给定 $\alpha = 0.05$.

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{7S_1^2 + 7S_2^2}{8 + 8 - 2}}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{8}}}.$$

由 $P\{T > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\} = P\{T > t_\alpha(14)\} \leqslant \alpha$,

可知 H_0 的拒绝域为：$T > t_\alpha(14)$.

(3) 由样本值计算.

$$T_0 = (\bar{x} - \bar{y})/\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{8}} = (73.125 - 68)/\sqrt{\frac{25.84 + 27.71}{8}} \doteq 1.981$$

查表 $t_{0.05}(14) = 1.7613$.

(4) 因为 $T_0 = 1.981 > 1.7613 = t_{0.05}(14)$,

所以在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,拒绝 H_0,认为山南苗高显著高于山北苗高.

11. 某一橡胶配方中,原用氧化锌 5g,现减为 1g,分别对两种配方作对比试验,测得橡胶伸长率(%),用原配方是 $x_1, x_2, \cdots, x_6$,用新配方是 $y_1, y_2, \cdots, y_9$.并计算得知:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 204.60, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 6978.93;$$

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 370.8, \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 15280.17.$$

假设橡胶伸长率服从正态分布,在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,试问两种配方的橡胶伸长率的标准差是否有显著差异?

解 设原配方橡胶伸长率 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,新配方橡胶伸长率 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

由题意知要检验 $\sigma_1 \overset{?}{=} \sigma_2$ 等价检验 $\sigma_1^2 \overset{?}{=} \sigma_2^2$

(1) 提出假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

(2) 检验统计量是 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

(3) H_0 的拒绝域为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

(4) 查表 $F_{0.975}(5,8) = \frac{1}{F_{0.025}(8,5)} = \frac{1}{6.76} = 0.15$.

$F_{0.025}(5,8) = 4.82$.

由样本值计算 $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.415}{0.413} = 1.005$,

其中 $S_1^2 = \frac{1}{5}\left[\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2\right] = 0.415$

$$S_2^2 = \frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{9} y_i^2 - \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{9} y_i\right)^2\right] = 0.413.$$

(5) 由于 $\frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.005 \not< 0.15$ 且 $\frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.005 \not> 4.82$. 于是在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,接受 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. 认为两种配方的橡胶伸长率的方差没有显著差异.

12. 为了减少发动机装配时间,拟定了一种新方案. 用原方案装配需时间 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,用新方案装配需时间 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 现用原方案装配 10 台,用新方案装配 9 台,记录装配时间分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_9$. 经计算得到:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 781, \quad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 212.94; \sum_{i=1}^{9} y_i = 662.67, \quad \sum_{i=1}^{9} (y_i - \bar{y})^2 = 210.$$

试问新方案是否比原方案装配时间要短?($\alpha = 0.05$).

分析 该题是两个正态总体均值差的假设检验.未知方差 σ_1^2,σ_2^2.要求 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.这个条件是否成立是需要检验的.所以先提出在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下检验 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

解 (1)先提出假设 $H_0' : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1' : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

H_0' 的检验统计量为$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

H_0' 的拒绝域为:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad 或 \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

查表 $F_{0.995}(9,8) = \dfrac{1}{F_{0.005}(8,9)} = \dfrac{1}{6.69} = 0.149$.

$F_{0.005}(9,8) = 7.34$.

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\frac{1}{9}\sum_1^{10}(x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{8}\sum_1^{9}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\frac{1}{9} \times 212.94}{\frac{1}{8} \times 210} = 0.901.$$

由于样本值计算结果$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 0.901 \not< 0.149 = F_{0.995}(9,8)$.

且$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 0.901 \not> 7.34 = F_{0.005}(9,8)$.

所以在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,接受 H_0,认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

(2)提出假设 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

H_0 的拒绝域为 $T = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$.

查表 $t_{0.05}(10 + 9 - 2) = t_{0.05}(17) = 1.7396$

$$用样本值计算\ s_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{\sum_1^{10}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_1^{9}(y_i - \bar{y})^2}{17}}$$

$$= \sqrt{\frac{212.94 + 210}{17}} = 4.988.$$

$$T_0 = \frac{\frac{1}{10} \times 781 - \frac{1}{9} \times 662.67}{4.988\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}}} = \frac{78.1 - 73.6}{4.988 \times 0.459} \doteq 1.966,$$

所以 $T_0 = 1.966 > 1.7396 = t_{0.05}(17)$.

于是在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,拒绝 H_0.认为 $\mu_1 - \mu_2 > 0$,即 $\mu_1 > \mu_2$ 新方案比原方案装配时间短.

13. 某人用手枪对 100 个靶各射击 10 次,记录各靶上中靶数.射击结果列入下表:

命中数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频　数	0	1	5	10	22	26	18	12	5	1	0

试问对一个靶射击 10 发命中靶数 X 是否服从二项分布(给定显著水平 $\alpha = 0.05$).

分析 要检验 $X \sim B(N,p)$ 是否成立,其中 $N = 10$ 是对一个靶射击次数. $p(0 < p < 1)$ 是每次射击中靶的概率. p 未知,要求用最大似然估计法估计 $\hat{p} = ?$ 已知条件 $n = 100$ 个靶即是样本容量.

解 由已知条件得知 X 表示对一个靶射击 10 次的命中数.

提出假设 $H_0: X \sim B(10,p)$.

当 H_0 成立时,用最大似然估计法估计 p 为 $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{N} = 0.5$(参见第七章的典型例题第 2 题)

检验假设: $H_0: X \sim B(10,0.5)$,

当 H_0 为真时 $p(X = k) = C_{10}^k(0.5)^k(0.5)^{10-k}, k = 0,1,2,\cdots,10$.

H_0 的拒绝域为 $\sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} > \chi_\alpha^2(m - 1 - 1)$.

其中 m 为划分小区间的个数.

计算列表如下:

组数(i)	中靶次数	f_i 频数	p_i	np_i	$\frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$
A_1	0	0	0.0009766	0.09766	1.208
	1	1	0.009766	0.9766	
	2	5	0.04394	4.394	
A_2	3	10	0.11719	11.719	0.252
A_3	4	22	0.20521	20.521	0.107
A_4	5	26	0.24609	24.609	0.079
A_5	6	18	0.20521	20.521	0.310
A_6	7	12	0.11719	11.719	0.007
A_7	8	5	0.04394	4.394	1.208
	9	1	0.009766	0.9766	
	10	0	0.0009766	0.09766	

在表中已将 np_i 的值不超过 5 的那些小区间与邻近的小区间合并,合并后小区间的个数 $m = 7$.

由上表计算得 $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = 3.171$

查表 $\chi_{0.05}^2(7 - 1 - 1) = \chi_{0.05}^2(5) = 11.071$

由于 $\chi_0^2 = 3.171 \not> 11.071 = \chi_{0.05}^2(7)$

所以在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, H_0 相容,认为 X 服从二项分布 $B(10,0.5)$.

四、习题与答案

习　题

1. 一台肥料混合机已调整到50千克肥料中含有5千克硝石.随机抽查了10袋50千克一袋的肥料,其硝石含量为(单位:kg):

9,10,11,12,11,9,11,12,9,10.

若规定显著水平 $\alpha = 0.01$,问该台机器生产的肥料中平均硝石含量是否等于10%?假定硝石含量服从正态分布.

2. 设废水中某种有毒物质的含量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,某厂要对该废水进行处理,要求某种有毒物质的浓度不超过19(mg/L).且已知方差 $\sigma^2 = 8.5(\text{mg/L})^2$.抽样检查得到10个数据,其样本值之和为171(mg/L).问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,处理后的废水是否合格?

3. 规定某种溶液中含水量不得超过0.5%.由它的10个样品测定值计算出 $\bar{x} = 0.552\%$, $S = 0.03\%$.设溶液中含水量服从正态分布.试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,分别检验:

(1) 该溶液的含水量是否合格?

(2) 该溶液含水量的标准差是否超过0.04%?

4. 某学生参加体育培训结束时,其跳远成绩 X 近似服从正态分布.鉴定成绩是均值为576cm,标准差为8cm.若干天后对该学生独立抽测10次,得跳远成绩数据(单位:cm).

578,572,580,568,572,570,572,570,596,584.问该学生跳远成绩水平与稳定性是否与鉴定成绩有显著差异?($\alpha = 0.05$)

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,2^2)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{16})$ 是来自该总体的样本, $\overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$ 是样本均值.检验假设 $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu \neq 0$.试证下述二个 H_0 的拒绝域有相同的显著水平.

(1) $1.50 < 2\overline{X} < 2.215$.

(2) $2\overline{X} < -1.96$ 或 $2\overline{X} > 1.96$.

6. 某厂生产轴套,每批数量很大,出厂标准是废品率不得超过0.02.现从一批中随机抽取400只轴套,测量其内径,发现有12只不合格,问是否应让这批产品出厂?(给定 $\alpha = 0.05$)

7. 为了比较两种枪弹的速度(单位:m/s),在相同的条件下独立进行速度测定,计算得样本均值和样本标准差如下:

枪弹甲: $n_1 = 110$,样本均值 $\bar{x} = 2805$,样本标准差 $s_1 = 120.41$.

枪弹乙: $n_2 = 100$,样本均值 $\bar{y} = 2680$,样本标准差 $s_2 = 105$.

设枪弹速度服从正态分布.在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下,问甲种枪弹的速度是否比乙种枪弹速度快?

8. 检查产品质量时,每次抽取 $N = 10$ 个产品来检查,共抽取 $n = 100$ 次,记录次品数如下表:

次品数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频　数	35	40	18	5	1	1	0	0	0	0	0

试问次品数 X 是否服从二项分布?($\alpha = 0.1$)

9. 将一正四面体的四面分别涂为红、绿、蓝、白四种不同的颜色.任意抛掷该四面体,直至白色的一面朝下为止.记录抛掷的次数,重复作如此试验 200 回,其结果如下表:

抛掷次数	1	2	3	4	≥5
频　数	56	48	32	28	36

试问该四面体是否匀称.($\alpha = 0.05$)

答案与提示

1. 注意单位要统一

解:方法一:$H_0: \mu = \mu_0 = 10\%, H_1: \mu \neq \mu_0$ 计算时,要将原样本值换算成百分率:即

x_k	9	10	11	12…
变为$\frac{x_k}{50}\%$	0.18	0.2	0.22	0.24…

方法二:$H_0: \mu = \mu_0 = 5(\text{kg})$　$H_1: \mu \neq \mu_0$ 计算时,可用原样本值.

判断结果是:在 $\alpha = 0.01$ 下拒绝 H_0.

2. 解:$H_0: \mu \geqslant \mu_0 = 19, H_1: \mu < 19$.

判断结果是:在 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0,认为处理后的废水合格.

3. (1) 解:$H_0: \mu \leqslant \mu_0 = 0.5, H_1: \mu > 0.5$.

判断结果是:在 $\alpha = 0.05$ 下,拒绝 H_0.

(2)$H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 = 0.0016, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

判断结果是:在 $\alpha = 0.05$ 下,H_0 相容.

4. 判断结果:在 $\alpha = 0.05$ 下,μ 与 σ^2 都无显著差异.

5. 略.

6. 提示:$H_0: p \leqslant p_0 = 0.02, H_1: p > p_0$.

∵ 产品批量大,无放回抽取近似有放回抽取,抽样的产品中不合格品数 $m \sim B(400,p)$,当 n 很大时,由德莫佛-拉普拉斯定理可知.近似地有 $\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$.可推知 H_0 的拒绝域为 $u = \frac{m - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_\alpha$.

答:由于样本值计算 $u_0 = 1.429 < u_{0.05} = 1.645$,故在 $\alpha = 0.05$ 下,H_0 相容,认为该批产品可出厂.

7. 先应检验两种枪弹速度的方差是否相等?

答:判断结论:方差相等.两总体在方差相等条件下再检验假设:$H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2, H_1: \mu_1 > \mu_2$,其中 μ_1、μ_2 分别是甲、乙两种枪弹速度的均值.

判断结论:拒绝 H_0.

8. 检验假设 $H_0: X \sim B(10,p)$,当 H_0 为真时,p 的最大似然估计 $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{N} = 0.1$,

$H_0: X \sim B(10,0.1)$.

由于 $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \doteq 0.145 < \chi_{0.10}^2(2) = 4.605$ 所,以在 $\alpha = 0.10$ 下,认为总体 $X \sim B(10,0.1)$.

9. 设 X 表示首次白色面朝下所需要抛掷的次数.

若四面体匀称时,则 $X \sim P(X = k) = p(1-p)^{k-1}(k = 1,2,3,\cdots)$,其中 p 表示任意抛掷一次白色面向下的概率.即 $p = \frac{1}{4}$.

H_0:四面体匀称.

即当 H_0 为真时,$P(X = k) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{k-1}(k = 1,2,\cdots)$.

由于 $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} = 18.21 > \chi_{0.05}^2(4) = 9.488$,所以拒绝 H_0,在 $\alpha = 0.05$ 下认为四面体不匀称.

第九章　回归分析

一、基本要求

① 理解回归分析的概念，掌握一元线性回归方程的求法.

② 对一元线性回归模型，掌握线性相关显著性的检验法.

③ 掌握利用线性回归方程进行预测的方法.

④ 了解一些可线性化的回归问题及简单的多元线性回归.

二、内容提要

回归分析是研究变量间相关关系的一种有效的数理统计方法.

1. 一元线性回归

(1) 数学模型.

如果随机变量 Y 与非随机变量 x 之间满足如下关系：

$$Y = b_0 + b_1x + e \qquad E(e) = 0 \qquad D(e) = \sigma^2 > 0$$

则称变量 Y 与 x 满足一元线性回归模型. b_0, b_1 和 σ 为未知参数.

(2) 线性回归方程.

假设对于上述回归模型，当 x 取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时，Y 分别有相互独立的观测值 $y_1, y_2 \cdots, y_n$. 即一组数据 (x_i, y_i) $i = 1,2\cdots,n$. 满足

$$y_i = b_0 + b_1x_i + e_i \qquad E(e_i) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

$$\mathrm{Cov}(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则未知参数 b_0, b_1 的最小二乘估计分别为：

$$\hat{b}_0 = \hat{y} - \hat{b}_1\bar{x};$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

其中 $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i, \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. $\hat{b}_0, \hat{b}_1$ 分别是 b_0, b_1 的一致最小方差线性无偏估计.

总变差平方和有分解式 $S_{总} = S_{残} + S_{回}$，其中，$S_{总} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ 为总变差平方和，$S_{残} = \sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2$ 为残差平方和($\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ 为对于 x_i 处的残差或乘余). $S_{回} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 为回归平方和.

σ^2 的无偏估计为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{S_{残}}{n-2}$

(3) 线性相关关系的假设检验 .

检验的假设为 $H_0: b_1 = 0$.

在进一步假定 $e_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 服从正态分布的条件下,有两种检验法:

① t 检验法,检验的统计量为 $T = \sqrt{\dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}}$, H_0 的拒绝域为 $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$.

② F 检验法,检验的统计量为 $F = \dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}$, H_0 的拒绝域为 $F > F_\alpha(1, n-2)$.

这两种检验法实质上是等价的(其证明参见本章"问题与思考"中第 4 题).

(4) 预测与控制 .

① 预测. 在一元正态线性回归模型下, $x = x_0$ 对应的随机变量 $Y = Y_0$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间为 $(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0 - \delta, \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0 + \delta)$, 其中, $\delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{\dfrac{S_{残}}{(n-2)}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$ 为该区间的半径.

② 控制. 在一元正态线性回归模型下,对于因变量 Y 的变化范围 (y_1, y_2) 和置信度 $1-\alpha$, 对应 x 的控制区间为 (x_0', x_0''). 当样本容量 n 较大,又 x_0', x_0'' 接近 $\bar{x}$ 时, x_0', x_0'' 有如下的近似表达式:

$$x_0' = \frac{1}{\hat{b}_1}\left(Y_1 - \hat{b}_0 \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{残}}{n-2}}\right) \qquad (\hat{b}_1 < 0 \text{ 时取正号,否则取负号});$$

$$x_0'' = \frac{1}{\hat{b}_1}\left(Y_2 - \hat{b}_0 \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{残}}{n-2}}\right) \qquad (\hat{b}_1 < 0 \text{ 时取负号,否则取正号}).$$

2. 多元线性回归简介

如果随机变量 Y 与变量 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 之间满足如下关系:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_p x_p + e;$$
$$E(e) = 0 \quad D(e) = \sigma^2 > 0.$$

其中的 $b_0, b_1, \cdots, b_p, \sigma^2$ 都是未知参数. 则我们称 Y 与 $x_1, x_2 \cdots x_p$ 满足多元线性回归模型.

通过最小二乘法可得 $b_0, b_1, \cdots, b_p$ 的最小二乘估计分别为 $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_p$, 它们均是相应的线性无偏估计.

$\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \cdots + \hat{b}_p x_p$ 称为线性回归方程 .

与一元线性回归一样,有总平方和的分解公式 $S_{总} = S_{回} + S_{残}$, $\dfrac{S_{残}}{n-p-1}$ 是 σ^2 的无偏估计.

同样有线性相关关系的检验,检验假设 $H_0: b_1 = b_2 = \cdots b_p = 0$. 在正态线性回归模型下,检验统计量为 $F = \dfrac{S_{回}/p}{S_{残}/(n-p-1)}$, H_0 的拒绝域为 $F > F_\alpha(p, n-p-1)$.

三、问题与思考

1. 何为相关关系?试举例说明 .

答 通常,变量之间的关系可以划分为两种类型:一类是确定关系,即当一个或一些变量取定值后,另外一个或一些变量有确定值与之对应,这种关系也就是人们所熟悉的函数关系,另一类便是相关关系,它具有非确定性,即当一个或一些变量取定以后,由于试验误差等各种偶然因素的影响,另外一个变量或一些变量不能以确定值与之对应,取值带有一定的随机性,但它们之间却存在着某种联系,并非毫无关系.例如,人的身高 X 和体重 Y 之间并不存在确定的函数关系,因为身高相同的人,体重并不都相同.然而它们之间并不是毫无关系的,身材高一些的人,一般身体要重一些.身高 X 与体重 Y 之间便是一种相关关系.

2. 对线性回归模型的统计分析主要要解决哪些问题?

答 对线性回归模型的统计分析主要要解决的问题有三个:

(1) 对未知参数 $b_0,b_1\cdots,b_p$ 及方差 σ^2 进行估计,以便得到所需的回归方程,并为对所需要做的各种统计分析作准备;

(2) 对有关未知参数的种种假设进行检验.特别重要的是,对回归函数线性假设的检验,以及回归自变量 $x_1,x_2\cdots,x_p$ 作用是否显著的检验,以便在使用回归方程时,能获得较精确和可靠的效果以及得到一个最符合实际的回归方程等等;

(3) 预测和控制,这是回归分析重要的应用之一.

3. 将 n 次观测结果 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 画在坐标系中,散点图若呈以下曲线形状,试分别把这种 x 与 y 的非线性相关化成线性关系模型.

(1) $\frac{1}{y}=\alpha+\frac{\beta}{x}$

(2) $y=\alpha e^{\beta x}$

(3) $y=\alpha e^{\frac{\beta}{x}}$

(4) $y=\alpha+\beta\ln x$

(5) $y=\alpha x^{\beta}$

解 (1) 散点图形如 $\frac{1}{y}=\alpha+\frac{\beta}{x}$ 称为双曲型,只要令 $y'=\frac{1}{y},x'=\frac{1}{x}$,就有 $y'=\alpha+\beta x'$

即只要将 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 都作变换 $y_i'=\frac{1}{y_i},x_i'=\frac{1}{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

对 $(x_1',y_1'),(x_2',y_2'),\cdots,(x_n',y_n')$ 作线性回归得 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$,有 $y'=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x'$,从而得 $\frac{1}{y}=\hat{\alpha}+\frac{\hat{\beta}}{x}$

(2) 散点图形如 $y=\alpha e^{\beta x}$ 称为指数型,只要令 $y_1=\ln|y|,A=\ln|\alpha|$,就有 $y_1=\pm A+\beta x$

(3) 散点图形如 $y=\alpha e^{\frac{\beta}{x}}$ 也称为指数型,只要令 $y_1=\ln|y|,A=\ln|\alpha|,x_1=\frac{1}{x}$

就有 $y_1=\pm A+\beta x_1$

(4) 散点图形如 $y=\alpha+\beta\ln x$ 称为对数型,只要令 $x_1=\ln x$,就有 $y=\alpha+\beta x_1$

(5) 散点图形如 $y = \alpha x^{\beta}$ 称为幂函数型，只要令：$y_1 = \ln|y|, x_1 = \ln|x|, A = \ln|\alpha|$，就有 $y_1 = A + \beta x_1$

4. 对一元线性回归模型，叙述线性相关关系的 t - 检验法和 F - 检验法，并证明这两种检验法是等价的.

答 设一元线性回归模型为：

$$Y = b_0 + b_1 x + e; \qquad E(e) = 0.$$

且假设 $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是来自该模型的一组数据. 即 $y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$，设，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 独立同分布，$e_1 \sim N(0, \sigma^2)$. 检验 $H_0: b_1 = 0$ 称为线性相关关系的检验. 对该假设，有两种检验法：①t 检验法. 检验用的统计量为 $T = \sqrt{\dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}}$，$H_0$ 的拒绝域为 $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$. ②$F$ 检验法，检验的统计量为 $F = \dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}$，$H_0$ 的拒绝域为 $F > F_{\alpha}(1, n-2)$，可证，这两种检验法是等价的.

首先，可以证明：若 X 为随机变量，则 $X \sim t(n)$ 的充要条件是 $X^2 \sim F(1,n)$. 事实上，设 Z, W 为两个相互独立的随机变量，$Z \sim N(0,1)$，$W \sim \chi^2(n)$，则由 $X \sim t(n)$ 知 X 与 $T_1 = Z/\sqrt{W/n}$ 同分布，故 X^2 与 $T_1^2 = \dfrac{Z^2}{W/n}$ 同分布，而显然 $T_1^2 \sim F(1,n)$，故 $X^2 \sim F(1,n)$，同理，由 $X^2 \sim F(1,n)$ 知 $X \sim t(n)$.

因此，若 $X \sim t(n-2)$，则 $P(|X| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)) = P(X^2 > F_{\alpha}(1, n-2)) = \alpha$，

所以 $t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-2) = F_{\alpha}(1, n-2)$，即 $|X| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ 与 $X^2 > F_{\alpha}(1, n-2)$ 等价.

对于 t 检验法用到的统计量 $T = \sqrt{\dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}}$ 与 F 检验法用到的统计量 $F = \dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)}$ 来说，有 $F = T^2$，故 t 检验法得出的拒绝域 $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ 与 F 检验法得出的拒绝域 $F > F_{\alpha}(1, n-2)$ 相同，因而，两种检验法是等价的.

5. 简述最小二乘法及其基本思想.

答 以一元线性回归模型为例进行介绍.

设一元线性回归模型为：

$$Y = b_0 + b_1 x + e \qquad E(e) = 0, \quad D(e) = \sigma^2 > 0.$$

找 $\hat{b}_0, \hat{b}_1$，使 x_i 处的回归值 $\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 与观察值 $y_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 之间的偏差平方和（称为残差平方和）$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ 达到最小，这样求 b_0, b_1 的估计 $\hat{b}_0, \hat{b}_1$ 的方法叫最小二乘法.

由于 n 个观测值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 来自一元线性回归模型，所以它们应当聚集在回归直线 $E(Y) = b_0 + b_1 x$ 的周围. 因此，作为 b_0, b_1 的"好的"估计 $\hat{b}_0, \hat{b}_1$，自然希望 n 个观测值最"靠近"于直线 $\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x$. 将这种想法数量化就是最小二乘法.

事实上，对平面上任一直线 $y = a + bx$，显然 $|y_i - (a + bx_i)|$ 的大小就是点 (x_i, y_i) 到直线 $y = a + bx$ 的纵向距离的大小，由于绝对值不便于数学上处理，改用 $[y_i - (a + bx_i)]^2$ 来刻画点 (x_i, y_i) 到直线 $y = a + bx$ 的远近程度. 希望选配一条直线，即选取 $\hat{b}_0, \hat{b}_1$，使函数 $Q(a,$

$b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2$ 在 $a = \hat{b}_0, b = \hat{b}_1$ 时达到最小.

6. 在一元正态线性回归模型下,假设 $H_0: b_1 = 0; H_1: b_1 \neq 0$,当 H_0 被接受或拒绝时各意味着什么?

答 当 $H_0: b_1 = 0$ 被接受时,意味着 Y 的取值倾向不随 x 的值按一元线性关系变化.此时,可能有以下几种情况之一:

① 变量 Y 与 x 之间没有显著的相关关系.

② 变量 Y 与 x 之间相关关系是非线性的.

③ 有其他变量同变量 x 一起对 Y 有显著的线性影响,但因为这些变量与 x 之间的交互作用的结果,使得变量 x 对 Y 的线性相关作用减弱.

当 $H_1: b_1 = 0$ 被拒绝时,认为 Y 与 x 之间存在着某种程度的相关性,而且是线性相关的.

四、典型例题

1. 对某种产品进行一项腐蚀加工试验,得到腐蚀时间 x(s) 和腐蚀深度 y(μm) 数据见下表:

x	5	5	10	20	30	40	50	60	65	90	120
y	4	6	8	13	16	17	19	25	25	29	46

假设 y 与 x 之间符合一元线性回归模型 $y = b_0 + b_1x + e$.

(1) 试建立线性回归方程;

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下,检验 $H_0: b_1 = 0$;

(3) 当 $x_0 = 75$ s 时,求腐蚀深度 y_0 的置信水平为 0.99 的置信区间;

(4) 给定 $1 - \alpha = 0.95$,使腐蚀深度在 10 ~ 20 μm 之间,应腐蚀多长时间?;

解(1) $\because \hat{b}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i - 11\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2 - 11\bar{x}^2} = \dfrac{11755 - 11 \times 45 \times 18.91}{3.5875 - 11 \times 2025} = 0.323,$

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1\bar{x} = 18.91 - 0.323 \times 45 = 4.375,$$

$\therefore$ 线性回归方程为 $\hat{y} = 4.375 + 0.323x$.

(2) $S_{总} = \sum_{i=1}^{11}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{11} y_i^2 - 11 \cdot \bar{y}^2 = 5398 - 11 \times 357.5881 = 1464.531.$

$$S_{回} = \sum_{i=1}^{11}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{b}_1^2\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2 = \hat{b}_1^2(\sum_{i=1}^{11} x_i^2 - 11 \cdot \bar{x}^2)$$
$$= 0.323^2 \cdot (35875 - 11 \times 2025) = 1418.8744.$$

$$S_{残} = S_{总} - S_{回} = 45.6565.$$

检验假设 $H_0: b_1 = 0, H_1: b_1 \neq 0$.

H_0 的检验统计量为 $F = \dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)} \sim F(1, n-2)$.

H_0 的临界值为 $F_\alpha(1, n-2) = F_{0.01}(1,9) = 10.6$, 由前面已计算的结果知 $F =$

$\dfrac{S_{回}}{S_{残}/(n-2)} = 279.697 > 10.6 = F_\alpha(1, n-2)$，所以，在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下，拒绝原假设，认为 $b_1 \neq 0$，即 Y 对 x 的线性回归显著.

(3) $\delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{\dfrac{S_{残}}{n-2}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$

$= 3.2498 \times 2.2523 \times 1.0755 = 7.87$

y_0 的 $1 - \alpha = 0.99$ 置信水平的置信区间为

$$(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0 - \delta, \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_0 + \delta),$$

经计算得区间为(20.73,36.47).

(4) 为了使腐蚀深度在一定范围内，控制腐蚀时间的范围，这是控制问题.

控制范围为(x_0', x_0'')，其中：

$$x'_0 = \frac{1}{\hat{b}_1}\left(y_1 - \hat{b}_0 + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{残}}{n-2}}\right) = \frac{1}{0.323}(10 - 4.375 + 2.58 \times 2.2523) = 31.36.$$

$$x''_0 = \frac{1}{\hat{b}_1}\left(y_2 - \hat{b}_0 - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_{残}}{n-2}}\right) = \frac{1}{0.323}(20 - 4.375 - 2.58 \times 2.2523) = 34.43.$$

故腐蚀时间应控制在 31.36 ~ 34.43(s) 之间.

2. 设随机变量 Y 与非随机变量 x 满足一元正态线性回归模型 $Y = b_0 + b_1 x + e, e \sim N(0, \sigma^2), \sigma^2 > 0$ 未知，今对 x, Y 独立观测 9 次，得观测结果为：

x	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y	66.7	71.0	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.6	125.9

(1) 求 Y 对 x 的回归方程.

(2) 在 $\alpha = 0.01$ 下，检验 $H_0: b_1 = 0$.

解 (1) 由 $\hat{b}_1, \hat{b}_0$ 的计算公式得：

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i y_i - 9\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9\bar{x}^2} = \frac{3535.84}{4060} = 0.87,$$

$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x} = 67.51$,

故所求的回归方程为 $\hat{Y} = 67.51 + 0.87x$.

(2) 先计算以下几个平方和：

总变差平方和 $S_{总} = \sum_{i=1}^{9}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - 9\bar{y}^2$

$= 76218.17 - 9 \times 90.14^2 = 3091.194.$

回归平方和 $S_{回} = \sum_{i=1}^{9}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 3073.014.$

残差平方和 $S_{残} = S_{总} - S_{回} = 18.18.$

对假设 $H_0: b_1 = 0$，可有两种检验法.

法一 用 F 检验法

H_0 的检验统计量为 $F = \dfrac{S_{回}}{\dfrac{S_{残}}{n-2}} \sim F(1, n-2)$,

H_0 的临界值为 $F_\alpha(1, n-2) = F_{0.01}(1,7) = 12.25$,

H_0 的拒绝域为 $F > F_\alpha(1, n-2)$.

计算检验统计量 F 的值:

$$F = \frac{S_{回}}{\dfrac{S_{残}}{n-2}} = 1144.2 > 12.25 = F_\alpha(1, n-2),$$

所以,在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下,拒绝 $H_0: b_1 = 0$,认为 $b_1 \neq 0$. 即 Y 与 x 的线性回归显著.

法二 用 t 检验法

H_0 的检验统计量为 $T = \dfrac{\hat{b}_1\sqrt{S_{xx}}}{\sqrt{\dfrac{S_{残}}{n-2}}} \sim t(n-2)$,

H_0 的临界值为 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{\frac{0.01}{2}}(9-2) = t_{0.005}(7) = 3.499$,

H_0 的拒绝域为 $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$,

利用前面已计算出的量可得:

$S_{xx} = \sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 = 4060$,

$\hat{b}_1 = 0.87$,

$S_{残} = 18.18$.

于是

$$|T| = \left|\frac{\hat{b}_1\sqrt{S_{xx}}}{\sqrt{\dfrac{S_{残}}{n-2}}}\right| = 34.398 > 3.499 = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2).$$

故在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下,拒绝 $H_0: b_1 = 0$,认为 $b_1 \neq 0$,即 Y 对 x 的线性回归显著.

本题中,t 检验法和 F 检验法得到相同的结论.这两种方法事实上是一致的.

五、习题与答案

习　题

1. 设随机变量 Y 与非随机变量 x 满足一元线性回归模型 $Y = b_0 + b_1x + e$, $E(e) = 0$, $D(e) = \sigma^2 > 0$,对 x 和 Y 独立观测 6 次,得到以下数据:

x	300	400	500	600	700	800
y	40	50	55	60	67	70

试求 Y 关于 x 的线性回归方程.

2. 用镁合金 X 光探伤时,要考虑透视电压 V 与透视厚度 l 的关系,做了 5 次独立试验,结果如下:

l(mm)	8	16	20	34	54
V(kV)	45	50.5	55	62.5	70

设 $V_i = b_0 + b_1 l_i + e_i (i = 1,2,\cdots,5)$，$e_i$ 是相互独立且服从正态分布 $N(0,\sigma^2)(\sigma^2 > 0$，未知)的随机变量，试求 V 关于 l 的线性回归方程，并在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验线性回归模型的显著性.

3. 已知 x 和 y 的观察数据列入下表：

x	-2.0	0.6	1.4	1.3	0.1	-1.6	-1.7	0.7	-1.8	-1.1
y	-6.1	-0.5	7.2	6.9	-0.2	-2.1	-3.9	3.8	-7.5	-2.1

设 y 与 x 符合一元线性回归模型 $y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i (i = 1,2,\cdots,10)$，$y_i$ 是相互独立且服

第十章　方差分析

一、基本要求

① 了解单因素的方差分析.

② 了解双因素的方差分析.

二、内容提要

1. 单因素方差分析

假设对试验指标有影响的因素只有一个,记为因素 A,它取 p 个不同的水平 $A_1,A_2,\cdots,A_p$. 而每个水平下的指标可看作一个总体,这 p 个总体都服从正态分布,方差相等. 即这 p 个总体为 $N(\mu_i,\sigma^2)\ i=1,2,\cdots,p$. 从第 i 个总体中抽取的样本为 $(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in_i})$,于是有

$$X_{ij}\sim N(\mu_i,\sigma^2)\quad i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,n_i$$

检验因素 A 对试验指标作用是否显著,即检验因素 A 的各个水平下的总体均值是否有显著差异. 原假设为

$$H_0:\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p.$$

对该假设,检验的统计量为:

$$F=\frac{(n-p)S_A}{(p-1)S_E},$$

其中 $S_A=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2=\sum_{i=1}^{p}n_i(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ 为组平均值 $\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$ 与总平均值 $\bar{x}_{\cdot\cdot}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$(其中 $n=n_1+n_2+\cdots+n_p$)之差的平方和即组间离差平方和. $S_E=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})^2$ 为每一个水平内的观察值 x_{ij} 与其组平均值 $\bar{x}_{i\cdot}$ 之差的平方和即组内离差平方和. 且有 $S_T=S_A+S_E=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2$ 是所有观察值 x_{ij} 与总平均值 $\bar{x}_{\cdot\cdot}$ 之差的平方和,称为总离差平方和.

当原假设 H_0 成立时,$F\sim F(p-1,n-p)$,对于给定的显著水平 α,当 $F>F_\alpha(p-1,n-p)$ 时拒绝 H_0,否则认为试验结果与 H_0 无显著差异,即 H_0 的拒绝域为 $F>F_\alpha(p-1,n-p)$.

μ,μ_i 的点估计分别为:

$$\hat{\mu}=\bar{x}_{\cdot\cdot}$$

$$\hat{\mu}_i=\bar{x}_{i\cdot}\quad i=1,2,\cdots,p$$

σ^2 的点估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{S_E}{n-p},$$

μ_i 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\bar{x}_{i\cdot}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)\sqrt{\frac{\bar{S}_E}{n_i}},\quad \bar{x}_{i\cdot}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)\sqrt{\frac{\bar{S}_E}{n_i}}\right).$$

其中 $\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-p}$,

$\mu_k-\mu_l$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left((\bar{x}_{k\cdot}-\bar{x}_{l\cdot})-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)\sqrt{\bar{S}_E\left(\frac{1}{n_k}+\frac{1}{n_l}\right)},(\bar{x}_{k\cdot}-\bar{x}_{l\cdot})+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)\sqrt{\bar{S}_E\left(\frac{1}{n_k}+\frac{1}{n_l}\right)}\right)$$

$$k,l=1,2,\cdots,p.$$

应用中,常列出方差分析表如下:

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因素的影响	S_A	$p-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{p-1}$	$F_A=\dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$n-p$	$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-p}$	
总和	S_T	$n-1$		

2. 双因素的方差分析简介

设影响试验指标的因素有两个,分别记为因素 A 和因素 B,对这两个因素,分别选取 p 个水平 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 和 q 个水平 $B_1,B_2,\cdots,B_q$,每对水平搭配 (A_i,B_j) 下的指标可看作一个总体. 因此,共有 pq 个总体. 假定这 pq 个总体服从等方差的正态分布 $N(\mu_{ij},\sigma^2)$ $i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q$. 对每对水平搭配下的总体,抽取一个容量为 r 的样本 $(X_{ij1},X_{ij2},\cdots,X_{ijr})$ $i=1,2,\cdots,p$, $j=1,2,\cdots,q$,并假定 $X_{ijk}\sim N(\mu_{ij},\sigma^2)$ $i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q,k=1,2,\cdots,r$.

设 $\mu_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij},i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q$,且 $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i=0,\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j=0$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\upsilon_{ij}=0,j=1,2,\cdots,q,\sum\limits_{j=1}^{q}\gamma_{ij}=0,i=1,2,\cdots,p$. 其中 α_i,β_j 分别表示因素 A 和因素 B 的各水平对指标量的影响;γ_{ij} 表示因素 A、B 每一水平的搭配对指标量的影响.

判断因素 A、B 及交互作用对指标的影响是否显著,等价于检验下面三个假设:

$H_{01}:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$,

$H_{02}:\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_q=0$,

$H_{03}:\gamma_{ij}=0,i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q$.

其检验的统计量分别为:

$$F_A=\frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E},F_B=\frac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E},F_{A\times B}=\frac{\bar{S}_{A\times B}}{\bar{S}_E}.$$

其中 $\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{p-1}$, $\bar{S}_B=\dfrac{S_B}{q-1}$.

$$\bar{S}_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}}{(p-1)(q-1)},\quad \bar{S}_E=\frac{S_E}{pq(r-1)}.$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(\bar{X}_{i\cdot\cdot}-\bar{X}_{\cdots})^2=qr\sum_{i=1}^{p}(\bar{X}_{i\cdot\cdot}-\bar{X}_{\cdots})^2.$$

$$S_B = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2 = pr\sum_{j=1}^{q}(\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2.$$

$$S_{A\times B} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdot j\cdot} + \bar{X}_{\cdots})^2.$$

$$S_E = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(X_{ijk} - \bar{X}_{ij\cdot})^2.$$

$$\bar{X}_{\cdots} = \frac{1}{pqr}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}X_{ijk}.$$

$$\bar{X}_{ij\cdot} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}X_{ijk} \quad i = 1,2,\cdots,p, j = 1,2,\cdots,q$$

$$\bar{X}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\bar{X}_{ij\cdot} \quad i = 1,2,\cdots,p$$

$$\bar{X}_{\cdot j\cdot} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}X_{ij\cdot} \quad j = 1,2,\cdots,q$$

与单因素方差分析的作法类似,总离差平方和 S_T 分解如下:

$$S_T = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(X_{ijk} - \bar{X}_{\cdots})^2 = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_E.$$

当 $H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$ 成立时,$F_A \sim F(p-1, pq(r-1))$,对于检验水平 α,H_{01} 的拒绝域为:$F_A > F_\alpha(p-1, pq(r-1))$;

当 $H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$ 成立时,$F_B \sim F(q-1, pq(r-1))$,对于显著水平 α,H_{02} 的拒绝域为:$F_B > F_\alpha(q-1, pq(r-1))$;

当 $H_{03}: r_{ij} = 0, i = 1,2,\cdots,p, j = 1,2,\cdots,q$ 成立时,$F_{A\times B} \sim F((p-1)(q-1), pq(r-1))$,对于显著水平 α,H_{03} 的拒绝域为:$F_{A\times B} > F_\alpha((p-1)(q-1), pq(r-1))$.

应用中,常列双因素方差分析表如下:

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值
因素 A	S_A	$p-1$	$\bar{S}_A$	$F_A = \bar{S}_A/\bar{S}_E$
因素 B	S_B	$q-1$	$\bar{S}_B$	$F_B = \bar{S}_B/\bar{S}_E$
交互因素 $A\times B$	$S_{A\times B}$	$(p-1)(q-1)$	$\bar{S}_{A\times B}$	$F_{A\times B} = \bar{S}_{A\times B}/\bar{S}_E$
误差	S_E	$pq(r-1)$	$\bar{S}_E$	
总和	S_T	$pqr-1$		

三、问题与思考

1. 试述方差分析的思想方法及分类.

答 对多个总体的均值的统计推断问题,我们采用的统计方法是分别独立地从各个总体中抽取样本,在样本观察值基础上,把总离差平方和分解成因素平方和和误差平方和,通过比较均方(即方差)的大小,判断假设的正确性,这种方法称为方差分析.

按选取影响试验指标的因素个数,方差分析可分为以下几类:选取一个因素,称为单因素

方差分析;选取两个因素,称为双因素方差分析;选取多于两个因素,称为多因素方差分析.

2. 什么是交互效应?

答 设影响试验指标的因素有两个,记为因素 A 和因素 B,分别取 p 个和 q 个不同水平 A_i: $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 和 B_j: $B_1,B_2,\cdots,B_q$. 每一对水平搭配 (A_i,B_j) 下,均可把试验指标看作一个总体,记为 X_{ij}. 假设 $X_{ij}\sim N(\mu_{ij},\sigma^2)$, $i=1,2,\cdots,p$, $j=1,2,\cdots,q$. 记 $\mu=\frac{1}{pq}\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_{ij}$ 为这些总体均值的总平均. 又记 $\mu_{i\cdot}=\frac{1}{q}\sum\limits_{j=1}^{q}\mu_{ij}$,它代表了 A_i 下试验指标取值的趋势. 记 $\mu_{\cdot j}=\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_{ij}$,它代表了 B_j 下试验指标取值的趋势.

称 $\alpha_i=\mu_{i\cdot}-\mu$, $i=1,2,\cdots p$ 为水平 A_i 的效应. 它的大小反映了因素 A 的第 i 个水平 A_i 相对作用的大小.

称 $\beta_j=\mu_{\cdot j}-\mu$, $j=1,2,\cdots,q$ 为水平 B_j 的效应. 它的大小反映了因素 B 的第 j 个水平 B_j 的相对作用的大小.

易知 $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i=0$, $\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j=0$,且有

$$\begin{aligned}\mu_{ij}&=\mu+(\mu_{i\cdot}-\mu)+(\mu_{\cdot j}-\mu)+(\mu_{ij}-\mu_{i\cdot}-\mu_{\cdot j}+\mu)\\&=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\mu_{ij}-\mu_{i\cdot}-\mu_{\cdot j}+\mu).\qquad i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,q\end{aligned}$$

其中最后的 $\mu_{ij}-\mu_{i\cdot}-\mu_{\cdot j}+\mu=(\mu_{ij}-\mu)-(\mu_{i\cdot}-\mu)-(\mu_{\cdot j}-\mu)=(\mu_{ij}-\mu)-\alpha_i-\beta_j$,记为 δ_{ij},它反映了从搭配 (A_i,B_j) 对试验指标相对作用(即 $\mu_{ij}-\mu$)中,减去 A_i 的效应(即 α_i,为水平 A_i 的相对作用),再减去 B_j 的效应(即 β_j,为水平 B_j 的相对作用). 如果它不为零,它只能是 A_i 与 B_j 搭配后的相对交互作用. 称 δ_{ij} 为水平 A_i 和水平 B_j 的交互效应.

显然 $\sum\limits_{i=1}^{p}\delta_{ij}=0$, $\sum\limits_{j=1}^{q}\delta_{ij}=0$.

四、典型例题

例 某灯泡厂采用四种不同配料方案制成的灯丝生产四批灯泡. 假设各种灯泡寿命 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$, $i=1,2,3,4$. X_i 独立, μ_i,σ^2 未知. 在每批中取若干只做寿命试验,得数据如下(单位:小时):

配料方案	灯泡寿命 /h							
A_1	2000	2010	2050	2080	2100	2120	2200	
A_2	1980	2040	2040	2100	2150			
A_3	1860	1900	2000	2020	2040	2060	2140	2220
A_4	1910	1920	1930	1970	2000	2080		

对于检验水平 $\alpha=0.05$,试问灯丝的不同配料方案对灯泡寿命有无明显影响?

解 这是单因素四水平的方差分析问题,提出假设 $H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$. 由于试验数据较大,可先进行适当线性变换. 令 $y_{ij}=\frac{x_{ij}-2000}{10}$, $i=1,2,3,4$, $j=1,2,\cdots,n_i$ 利用变换后

的数据作检验.变换后的数据和初步计算列入下表：

水平	数据 y_{ij}	$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$	$\frac{1}{n_i}(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij})^2$	$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$
A_1	0　1　5　8　10　12　20	56	448	734
A_2	-2　4　4　10　15	31	192	361
A_3	-14　-5　0　2　4　6　14　22	29	105	957
A_4	-9　-8　-7　-3　0　8	-19	60	267
求和	$n=26$	97	805	2319

因此可进一步计算：

$$S_A = \sum_{i=1}^{p} n_i \bar{y}_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2$$

$$= 805 - \frac{1}{26} \times (97)^2 \approx 443.$$

$$S_E = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2 = 2319 - 805 = 1514.$$

于是，我们可列出下列方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因素的影响	443	3	148	2.15
误　　差	1514	22	69	
总和	1957	25		

对于检验水平 $\alpha = 0.05$，查 F 分布表得临界值 $F_{0.05}(p-1, n-p) = F_{0.05}(3,22) = 3.05$. 故 $F = 2.15 < 3.05 = F_{0.05}(3,22)$.

注意：我们在解题开始时的线性变换不改变 F 值的大小. 从 $F < F_{0.05}(p-1, n-p)$ 知，不拒绝 H_0，认为不同配料对灯泡寿命无显著影响.

五、习题与答案

习　题

1.　设有一个数学提高班，现将学生分成三个小班，分别由甲、乙、丙三位教员任教，三个小班的部分学生的最终成绩由下表给出：

任课教员	学生成绩／分					
甲	65	55	75	75	55	
乙	85	65	80	90		
丙	85	75	95	90	100	65

设三个班学生成绩均服从正态分布，方差相同，在检验水平为 0.05 下，检验教员对学生学习成

绩影响是否显著.

2. 抽查某地区三所小学五年级男学生的身高,得数据如下:

小学	身高数据 /cm					
第 1 小学	128.1	134.1	133.1	138.9	140.8	127.4
第 2 小学	150.3	147.9	136.8	126.0	150.7	155.8
第 3 小学	140.6	143.1	144.5	143.7	148.5	146.4

设三所小学学生身高均为正态分布,方差相同,试问该地区三所小学五年级男学生的平均身高是否有显著差异?($\alpha = 0.05$)

3. 有方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值
因素 A	806.3	7	?	28.8
因素 B	943.6	3	314.5	
误差	84.1	21	4.0	
总和	1834.0	31		

试填出表中"问号"对应的数.

答案与提示

1. 显著.
2. 有显著差异.
3. A 的均方 $= 115.2, F_B = 78.6$

附表

附表 1　标准正态分布表

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3327	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

续表

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5398	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

附表 2　泊松分布累积概率值表

$$P\{X \geqslant x\} = \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

x	λ=0.1	λ=0.2	λ=0.3	λ=0.4	λ=0.5
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.0951626	0.1812692	0.2591818	0.3296800	0.393469
2	0.0046788	0.0175231	0.0369363	0.0615519	0.090204
3	0.0001547	0.0011485	0.0035995	0.0079263	0.014388
4	0.0000033	0.0000568	0.0002658	0.0007763	0.001752
5		0.0000023	0.0000158	0.0000612	0.000172
6		0.0000001	0.0000008	0.0000040	0.000014
7				0.0000002	0.000001

x	λ=0.6	λ=0.7	λ=0.8	λ=0.9	λ=1.0
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.451188	0.503415	0.550671	0.593430	0.632121
2	0.121901	0.155805	0.191208	0.227518	0.264241
3	0.023115	0.034142	0.047423	0.062857	0.080301
4	0.003358	0.005753	0.009080	0.013459	0.018988
5	0.000394	0.000786	0.001411	0.002344	0.003660
6	0.000039	0.000090	0.000184	0.000343	0.000594
7	0.000003	0.000009	0.000021	0.000043	0.000083
8		0.000001	0.000002	0.000005	0.000010
9					0.000001
10					

x	λ=1.2	λ=1.4	λ=1.6	λ=1.8	λ=2.0
0	1.0000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.698806	0.753403	0.798103	0.834701	0.864665
2	0.337373	0.408167	0.475069	0.537163	0.593994
3	0.120513	0.166502	0.216642	0.269379	0.323324
4	0.033769	0.053725	0.078813	0.108708	0.142877
5	0.007746	0.014253	0.023682	0.036407	0.052653
6	0.001500	0.003201	0.006040	0.010378	0.016564
7	0.000251	0.000622	0.001336	0.002569	0.004534
8	0.000037	0.000107	0.000260	0.000562	0.001047
9	0.000005	0.000016	0.000045	0.000110	0.000237
10	0.000001	0.000002	0.000007	0.000019	0.000046
11			0.000001	0.000003	0.000008
12					0.000001

续表

x	λ = 2.5	λ = 3.0	λ = 3.5	λ = 4.0	λ = 4.5	λ = 5.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.917915	0.950213	0.969803	0.981684	0.988891	0.993262
2	0.712703	0.800852	0.864112	0.908422	0.938901	0.959572
3	0.456187	0.576810	0.679153	0.761897	0.826422	0.875348
4	0.242424	0.352768	0.463367	0.566530	0.657704	0.734974
5	0.108822	0.184737	0.274555	0.371163	0.467896	0.559507
6	0.042021	0.083918	0.142386	0.214870	0.297070	0.384039
7	0.014187	0.033509	0.065288	0.110674	0.168949	0.237817
8	0.004247	0.011905	0.026739	0.051134	0.086586	0.133372
9	0.001140	0.003803	0.009874	0.021363	0.040257	0.068094
10	0.000277	0.001102	0.003315	0.008132	0.017093	0.031828
11	0.000062	0.000292	0.001019	0.002840	0.006669	0.013695
12	0.000013	0.000071	0.000289	0.000915	0.002404	0.005453
13	0.000002	0.000016	0.000076	0.000274	0.000805	0.002019
14		0.000003	0.000019	0.000076	0.000252	0.000698
15		0.000001	0.000004	0.000020	0.000074	0.000226
16			0.000001	0.000005	0.000020	0.000069
17				0.000001	0.000005	0.000020
18					0.000001	0.000005
19						0.000001

附表3　t 分布表

$P\{t(n) > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$

n	α = 0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6547
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

附表4 χ^2分布表

$$P\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$$

n	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
1	-	-	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	0.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240
23	9.260	10.196	11.698	13.091	14.848	18.137
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291

续表

n	α = 0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.799
21	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

附表 5　F 分布表

$P\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

$\alpha = 0.10$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.76	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00
$\alpha = 0.05$																			
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.80	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	184	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$\alpha = 0.025$																			
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.69	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.56	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$\alpha=0.25$																			
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00
$\alpha=0.01$																			
1	4052	4999.5	5403	5625	5964	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.98	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	4.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	3.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.40	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$\alpha=0.005$																			
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25944	25148	25253	25359	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	35.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	7.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.56	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43

续表

7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00
$\alpha = 0.001$												
5929†	5981†	6023†	6056†	6107†	6158†	6209†	6235†	6261†	6287†	6313†	6340†	6366†
999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.5
49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99	15.75
15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.29	9.73	9.53	9.33
10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	8.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.19	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.15	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.89
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.76	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册).北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册).北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册).北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册).北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册).北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册).北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996

[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990

[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996

[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982

[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979

[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992

[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993

参考书目

[1] 于学汉．概率论与数理统计教程．北京:兵器工业出版社,1996
[2] 刘颖等．高等数学(上、下册)．北京:北京理工大学出版社,1990
[3] 王梓坤．概率论基础及其应用,第二版．北京:北京师范大学出版社,1996
[4] 陈家鼎等．概率统计讲义,第二版．北京:人民教育出版社,1982
[5] 复旦大学．概率论(第一册)．北京:高等教育出版社,1979
[6] 陈希孺．概率论与数理统计．合肥:中国科学技术大学出版社,1992
[7] 陈家鼎等．数理统计学讲义．北京:高等教育出版社,1993